Università Politecnica delle Marche – Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica – Ing. delle Telecomunicazioni
Teledidattica

ANALISI NUMERICA – TEMA D
(Prof. A. M. Perdon)

Ancona, 17 luglio 2006

PARTE II - SOLUZIONE
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Dato il polinomio $P(x) = 4x^3 + 4.2x^2 - 21.8x + 22.1$:

   a) Determinare la regione del piano di Gauss contenente tutte le radici di $P(x)$;
   b) Costruire una successione Sturm per $P(x)$;
   c) Calcolare tutte le radici di $P(x)$ con 4 decimali esatti.

   Risultato: $x_{1=}$ $x_{2=}$ $x_{3=}$

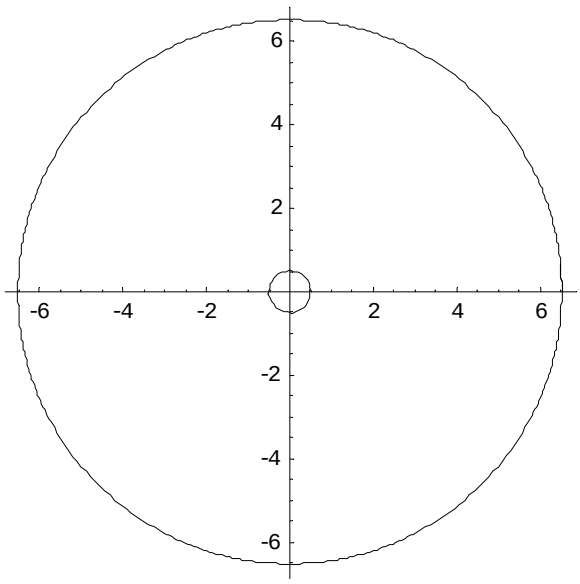
   Soluzione:

   a) Determinazione regione piano di Gauss contenente tutte le radici di *P(x)*
   La regione del piano di Gauss all'interno della quale si trovano le radici di *P(x)* La regione del piano di Gauss all'interno della quale si trovano le radici di *P(x)* è la corona circolare di centro l'origine descritta dalla disuguaglianza: $\frac{1}{1+\mu} \le |z| \le 1+\lambda$, dove

$$\lambda = \max_{i=1,..,n} \frac{|a_i|}{|a_0|} = 5.525, \qquad 1+\lambda = 6.525$$

$$\mu = \max_{i=0,..,n-1} \frac{|a_i|}{|a_n|} = 0.986425, \qquad \frac{1}{1+\mu} = 0.503417$$

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0, a_i \in C$



Quindi le radici reali negative ∈ [-6.525, -0.503417], quelle positive ∈ [0.503417, 6.525]

b) Costruzione successione di Sturm per il polinomio

polinomio di partenza:

$$p_0(x) = P(x) = 4x^3 + 4.2x^2 - 21.8x + 22.1$$

calcolo di $p_1(x)=-P'(x)$:

$$p_1(x) = -12x^2 - 8.4x + 21.8$$

Il resto $r_1(x)$ della divisione $\dfrac{p_0(x)}{p_1(x)}$ è

$$r_1(x) = -15.5133x + 24.6433$$

Raccogliendo in $r_1(x)$ la costante positiva del termine di grado massimo
c_1= 15.5133

si calcola $p_2(x)= -\dfrac{r_1(x)}{c_1}$

$$p_2(x) = x - 1.58853$$

Il resto $r_2(x)$ della divisione $\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ è

$$r_2(x) = -21.8246$$

Raccogliendo in $r_2(x)$ la costante positiva del termine di grado massimo
c_2= 21.8246

si calcola $p_3(x)= -\dfrac{r_2(x)}{c_2}$

$$p_3(x) = 1$$

Pertanto la successione di Sturm sarà costituita dalla sequenza dei seguenti polinomi:

$$p_0(x) = 4x^3 + 4.2x^2 - 21.8x + 22.1$$
$$p_1(x) = -12x^2 - 8.4x + 21.8$$
$$p_2(x) = x - 1.58853$$
$$p_3(x) = 1$$

Verifica del numero e del segno delle radici reali della successione di Sturm

$-\infty$	0	$+\infty$
-1	1	1
-1	1	-1
-1	-1	1
1	1	1
$w(-\infty)=1$	$w(0)=2$	$w(+\infty)=2$

Le radici reali negative sono: 2-1=1
Le radici reali positive sono: 2-2=0

Il polinomio è di grado 3, il numero di cambi di segno indica un numero di radici reali negative pari ad 1 e positive pari a 0, pertanto ci si aspetta esistano due radici complesse coniugate; converrà prima trovare la radice singola negativa con un metodo numerico, poi abbassare il grado del polinomio e infine calcolare le due radici complesse tramite la formula risolutiva per i polinomi di secondo grado.

c) Calcolo di tutte le radici di *P(x)* con almeno 4 decimali esatti

Per il calcolo della radice reale negativa si utilizzerà il metodo di Newton-Raphson. Essa si trova, per quanto già visto al punto a), nell'intervallo [-6.525, -0.503417], che non è troppo ampio, pertanto si può prendere il punto iniziale in prossimità del punto medio dell'intervallo

$x_0 = (-6.525 - 0.503417)/2 = -3.5142 \cong -3.5$,

Lo schema iterativo sarà $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{4x_k^3 + 4.2x_k^2 - 21.8x_k + 22.1}{12x_k^2 + 8.4x_k - 21.8}$

Stimiamo l'errore calcolando $m = \left| \dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2} \right|_{x=-3.5} = 0.17834$, $\left. \dfrac{m}{1-m} \right|_{x=-3.5} = 0.217048$

x_k	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$	$e_k \le \dfrac{m}{1-m}\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
−3.27401	0.225992	0.0490511
−3.25025	0.0237541	0.00515579
−3.25	0.000254225	0.0000551792
−3.25	2.89668×10^{-8}	6.2872×10^{-9}

pertanto con 4 decimali esatti è

$$\boxed{x_1 \cong -3.2500}$$

dividendo *P(x)* per *(x+3.25)* otteniamo il polinomio di secondo grado *r(x)* le cui radici sono le radici complesse e coniugate di *P(x)* ovvero:

$$r(x) = \frac{P(x)}{(x+3.25)} = 4x^2 - 8.8x + 6.8$$

Risolvendo l'equazione *r(x)=0* si ottiene: $r_1 = 1.1000 - i0.7000$ e $r_2 = 1.1000 + i0.7000$ e quindi

$$\boxed{x_2 = r_1 = 1.1000 - i0.7000}$$

$$\boxed{x_3 = r_2 = 1.1000 + i0.7000}$$

2. Risolvere il sistema $Ax=b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.4 & 2.5 \\ 5.2 & 2.8 & 1.2 \\ -1.3 & 3.8 & 5.4 \\ 8.4 & 0.7 & 0 \\ 3.2 & 2.2 & 5.6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5.7 \\ 6.2 \\ 2.6 \\ 4.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Usare la decomposizione QR, scrivere tutti i passaggi. Calcolare il residuo.

Soluzione:

La decomposizione QR di A dà come risultato:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.28401 & -0.463719 & 0.343602 \\ -0.476403 & -0.247666 & 0.406758 \\ 0.119101 & -0.759871 & -0.109036 \\ -0.769574 & 0.298092 & -0.0770605 \\ -0.293171 & -0.239505 & -0.835858 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -10.9151 & -3.03066 & -2.28032 \\ 0. & -5.47587 & -6.90103 \\ 0. & 0. & -3.92249 \end{pmatrix}$$

si calcola $Q^T \cdot b$:

$$Q^T \cdot b = \begin{pmatrix} -8.31232 \\ -5.29199 \\ 2.17845 \end{pmatrix}$$

Risolvendo per sostituzione all'indietro il sistema $R \cdot z = Q^T \cdot b$ rispetto a z si ottiene:

…
[qui omettiamo i passaggi]
…

$\boxed{z_1=0.414897}$

$\boxed{z_2=1.66634}$

$\boxed{z_3=-0.555374}$

Il residuo è $r = A \cdot z - b = \begin{pmatrix} -0.136708 \\ -0.043241 \\ 0.193696 \\ 0.151571 \\ -0.116481 \end{pmatrix}$ la cui norma euclidea vale $\|r\|_2 = \sqrt{\sum_1^5 r_i^2} = 0.307601$

3. Calcolare con il metodo di Cavalieri-Simpson il seguente integrale

$$\int_{1.2}^{3.2} log\left[(x^2+1)+0.3\cdot x\right]dx$$

con almeno 5 decimali esatti

Soluzione:

Si può imporre $R_C \leq 0.5\cdot 10^{-5}$, dove $R_C = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\eta)$ è il resto della formula composita di Cavalieri-Simpson, e calcolarsi *n*; oppure si può applicare la formula composita di Cavalieri-Simpson suddividendo l'intervallo di integrazione in sottointervalli via via dimezzati e stimare l'errore mediante estrapolazione di Richardson.

Scegliamo questo secondo metodo, con *a=1.2, b=3.2*

n=1

$$h = \frac{b-a}{2} = 1$$

$$I_0 = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(a+h)+f(b)\right) = 4.7768$$

n=2

$$h = \frac{b-a}{4} = 0.5$$

$$I_1 = \frac{b-a}{12}\left(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+f(b)\right) = 4.7758$$

La stima dell'errore su I_1 è

$$\varepsilon_1 = \frac{I_1 - I_0}{15} = -0.0000669462$$

n=4

$$h = \frac{b-a}{8} = 0.25$$

$$I_2 = \frac{b-a}{24}(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+2f(a+4h)$$
$$+4f(a+5h)+2f(a+6h)+4f(a+7h)+f(b))$$
$$=4.77565$$

La stima dell'errore su I_2 è:

$$\varepsilon_2 = \frac{I_2 - I_1}{15} = -0.950319\cdot 10^{-5}$$

Non è ancora sufficiente. Ora possiamo percorrere due strade: o dimezziamo ancora l'ampiezza dei sottointervalli, o continuiamo ad applicare l'estrapolazione.

1° modo

$n=8$

$$I_3 = \frac{b-a}{24}(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+2f(a+4h)$$
$$+4f(a+5h)+2f(a+6h)+4f(a+7h)+2f(a+8h)+4f(a+9h)+2f(a+10h)$$
$$+4f(a+11h)+2f(a+12h)+4f(a+13h)+2f(a+14h)+4f(a+15h)+f(b))$$
$$= 4.77564$$

La stima dell'errore su I_3 è:

$$\varepsilon_3 = \frac{I_3 - I_2}{15} = -0.735794 \cdot 10^{-6} = -0.0735794 \cdot 10^{-5}$$

2° modo

Siano

$$C_1 = I_1 + \frac{I_1 - I_0}{15} = 4.77579,$$

$$C_2 = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{15} = 4.77564,$$

La stima dell'errore su C_2 è: $\frac{C_2 - C_1}{63} = -0.26266 \cdot 10^{-5}$.

Pertanto, in entrambi i modi, il valore dell'integrale con 5 decimali esatti, è

$$\boxed{I \approx 4.77564}$$

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata l'uguaglianza:

$$(586.76)_{10}=(4321.34)_x$$

Soluzione:

Il numero a sinistra dell'uguaglianza è già in base 10, quindi possiamo direttamente uguagliare la parte intera o quella decimale.
Dal momento che la parte intera del numero in base x è costituita da 4 cifre, che implica risolvere un'equazione di III grado, mentre la parte decimale è costituita da solo 2 cifre, che implica risolvere un'equazione di II grado, uguagliamo le parti decimali del numero noto e del numero in base incognita.

$$0.76 = \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}$$

$$0.76x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4 \cdot 0.76}}{2 \cdot 0.76} = \begin{cases} / & -1.05263 \\ \backslash & 5 \end{cases}$$

La base di un sistema di numerazione deve essere un intero maggiore di 1, quindi la soluzione è: $x = x_2 = 5$