Università Politecnica delle Marche - Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni
Teledidattica

ANALISI NUMERICA - TEMA B

(Prof. A. M. Perdon)

Ancona, 17 luglio 2006

PARTE II.
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Determinare con il metodo di Newton-Raphson tutte le radici dell'equazione

$$x \cdot \log\left(x^4 + 0.42 * x^2 + 0.3\right) = 0$$

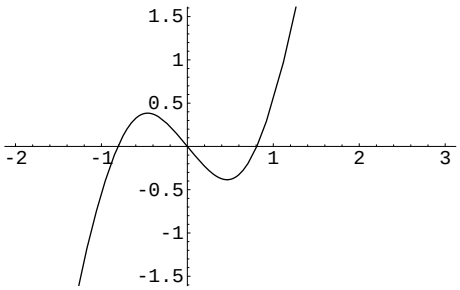
con cinque decimali esatti.

Risoluzione

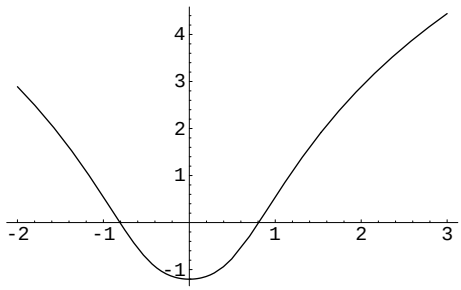
Osserviamo per prima cosa che la funzione può essere scissa nel prodotto di x per $\log\left(x^4 + 0.42 * x^2 + 0.3\right)$ e quindi ha sicuramente $x = 0$ come radice di molteplicità 1, perchè il primo fattore si annulla se e solo se $x = 0$.

Cerchiamo dunque le radici del secondo fattore: $f(x) = \log\left(x^4 + 0.42 * x^2 + 0.3\right)$, che è pari cioè $f(-x) = f(x)$.

Per prima cosa cerchiamo di individuare un intervallo reale in cui vi sia <u>una sola radice</u>, e per questo tracciamo il grafico di $f(x)$.



$y = x \cdot \log\left(x^4 + 0.42x^2 + 0.3\right)$



$y = \log\left(x^4 + 0.42x^2 + 0.3\right)$

Da entrambi i grafici si evince che le radici reali dell'equazione diverse da $x = 0$ sono due: una nell'intervallo $[-1, 0]$, l'altra nell'intervallo $[0, 1]$.

$f(x) = \log\left(x^4 + 0.42x^2 + 0.3\right)$ è derivabile con derivata $f'(x) = \frac{+4x^3+0.84x}{+x^4+0.42x^2+0.3}$ continua (il denominatore non ha radici reali). La derivata si annulla solo per $x = 0$, quindi ci restringiamo agli intervalli $[-1, -0.4]$ e $[0.4, 1]$.

Per la parità della funzione basta trovare la radice in uno dei due intervalli e la sua opposta sarà la radice che si trova nell'altro intervallo.

Lo schema iterativo sarà pertanto:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{({x_k}^4 + 0.42{x_k}^2 + 0.3) \cdot \log\left({x_k}^4 + 0.42{x_k}^2 + 0.3\right)}{+4{x_k}^3 + 0.84x_k}.$$

Partiamo dall'intervallo $[-1., -0.4]$.

Prendiamo come punto iniziale: $x_0 = -0.7 \ \in [-1., -0.4]$.

Poichè

$$m \approx \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right|_{x=-0.7} = 0.0893508 < 1,$$

$x_0 = -0.7$ è un buon punto iniziale, e

$$\frac{m}{1-m} = 0.0981177,$$

quindi l'errore si può stimare come $\epsilon_k \leq \frac{m}{1-m}|x_{k+1} - x_k| = 0.0981177|x_{k+1} - x_k|$

$$\begin{array}{llll} x_0 = & \text{-0.7} & & \\ x_1 = & \text{-0.811567} & \epsilon_1 \leq & 0.010947 \\ x_2 = & \text{-0.807846} & \epsilon_2 \leq & 0.000365 \\ x_3 = & \text{-0.807844} & \epsilon_3 \leq & 0.214 \cdot 10^{-6} \end{array}$$

Un'approssimazione della radice $\in [-1., -0.4]$ di $f(x)$ con 5 decimali esatti è $x = -0.80784$.

Nell'intervallo $[0.4, 1.0]$ la radice di $f(x)$ con 5 decimali esatti sarà $x = +0.80784$.

Quindi tutte le radici di $f(x)$ con cinque decimali esatti sono: $-0.80784,\ 0.00000,\ +0.80784$.

2. Risolvere il sistema $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2.2 & 3.5 & 1.2 & 7.4 \\ 2 & 2.5 & 1 & 5 \\ 3 & 3.4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 15.3 \\ 11. \\ 15.1 \end{pmatrix}.$$

Scrivere tutti i passaggi.

Risoluzione

Il sistema è sottodeterminato. Indichiamo con $x,\ y,\ z$ e t le componenti del vettore incognito e cerchiamo di mettere il sistema nella forma a gradini.

La matrice completa del sistema sarà:

$$\begin{pmatrix} 2.2 & 3.5 & 1.2 & 7.4 & 15.3 \\ 2 & 2.5 & 1 & 5 & 11. \\ 3 & 3.4 & 5 & 4 & 15.1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo il metodo di Gauss con Pivot parziale:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3.4 & 5 & 4 & 15.1 \\ 2 & 2.5 & 1 & 5 & 11. \\ 2.2 & 3.5 & 1.2 & 7.4 & 15.3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3.4 & 5 & 4 & 15.1 \\ 0. & 0.233333 & -2.33333 & 2.33333 & 0.933333 \\ 0. & 1.00667 & -2.46667 & 4.46667 & 4.22667 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 3.4 & 5 & 4 & 15.1 \\ 0. & 1.00667 & -2.46667 & 4.46667 & 4.22667 \\ 0. & 0.233333 & -2.33333 & 2.33333 & 0.933333 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3.4 & 5 & 4 & 15.1 \\ 0. & 1.00667 & -2.46667 & 4.46667 & 4.22667 \\ 0. & 0. & -1.76159 & 1.29801 & -0.0463576 \end{pmatrix}$$

Le equazioni non degeneri sono 3, le variabili in totale sono 4, quindi il sistema ammetterà $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. La variabile libera è t.

Risolviamo per sostituzione all'indietro, considerando la variabile t come parametro:

$$-1.76159z + 1.29801t = -0.0463576$$

$$z = \frac{-0.0463576 - 1.29801t}{-1.76159} = 0.0263158 + 0.736842t$$

$$1.00667y - 2.46667z + 4.46667t = 4.22667$$

$$y = \frac{4.22667 + 2.46667z - 4.46667t}{1.00667} = \frac{4.22667 + 2.46667(0.0263158 + 0.736842t) - 4.46667t}{1.00667} =$$
$$= 4.26316 - 2.63158t$$

$$3x + 3.4y + 5z + 4t = 15.1$$
$$x = \frac{15.1 - 3.4y - 5z - 4t}{3} = -2.11579 + 1.82456t$$

Quindi la soluzione è: $\begin{pmatrix} -2.11579 + 1.82456\ t \\ 4.26316 - 2.63158\ t \\ 0.0263158 + 0.736842\ t \\ t \end{pmatrix}$.

La soluzione si puó scrivere anche come $\begin{pmatrix} -2.11579 \\ 4.26316 \\ 0.0263158 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} +1.82456 \\ -2.63158 \\ +0.736842 \\ 1 \end{pmatrix}$ dove $\begin{pmatrix} -2.11579 \\ 4.26316 \\ 0.0263158 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare del sistema e $t \cdot \begin{pmatrix} +1.82456 \\ -2.63158 \\ +0.736842 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la soluzione del sistema omogeneo associato.

3. Calcolare con il Metodo di Cavalieri
$$\int_{1.2}^{2.0} f(x)dx$$
dove la $f(x)$ è definita dalla tabella

x	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x)$	1.212	1.425	1.512	1.794	1.602

Dare una stima dell'errore.

Risoluzione

Applichiamo le formule composita e semplice di Cavalieri e successivamente l'estrapolazione di Richardson.

I punti sono 5, quindi abbiamo $n = 2$ intervalli di ampiezza $2h = \frac{b-a}{n}$ su cui applicare la formula composita di Cavalieri-Simpson: $[1.2, 1.6]$ e $[1.6, 2.0]$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{b-a}{6n}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) = \\ &= \frac{2.0 - 1.2}{6 \cdot 2}\left(f(1.2) + 4f(1.4) + 2f(1.6) + 4f(1.8) + f(2.0)\right) = \\ &= \frac{0.8}{12}(18.714) = 1.2476 \end{aligned}$$

Ora applichiamo la formula semplice di Cavalieri-Simpson su tutto l'intervallo $[1.2, 2.0]$ ($n = 1$):

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{b-a}{6n}\left(f(x_0) + 4f(x_2) + f(x_4)\right) = \\ &= \frac{2.0-1.2}{6\cdot 1}\left(f(1.2) + 4f(1.6) + f(2.0)\right) = \\ &= \frac{0.8}{6}(8.862) = 1.1816 \end{aligned}$$

Valutiamo l'errore commesso su I_1: $\frac{I_1 - I_0}{15} = 0.0044$.

Quindi $\int_{1.2}^{2.0} f(x)dx \approx 1.25$
oppure una stima dell'integrale è: $I_1 + \frac{I_1 - I_0}{15} = 1.252$ con almeno due decimali esatti.

Facoltativo: Verificare quale dei due vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & -0.4 & -0.4 \end{pmatrix}$ e determinare il corrispondente autovalore.

Risoluzione

Un vettore v è autovettore di una matrice A se e solo se $Av = \lambda v$ per un certo λ, che in tal caso è detto l'autovalore relativo a v.

Calcoliamo:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & -0.4 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.2 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Per vedere se v_1 è autovettore di A, faccio il rapporto tra le singole componenti di Av_1 e di v_1; se il valore di tale rapporto è lo stesso per tutte le componenti, v_1 sarà autovettore e il rapporto indicherà l'autovalore corrispondente:

$$\begin{aligned} \frac{(Av_1)_1}{(v_1)_1} &= \frac{-0.2}{-1} = 0.2 \\ \frac{(Av_1)_2}{(v_1)_2} &= \frac{-0.2}{-1} = 0.2 \end{aligned}$$

Poiché $0 = 0.2 \cdot 0$, $(Av_1)_3 = \lambda(v_1)_3$ quindi v_1 è autovettore di A e $\lambda = 0.2$ è l'autovalore relativo.

Invece, v_2 non è autovettore di A, perché dovrebbe essere

$$\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & -0.4 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = Av_2 = \lambda v_2 = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ 3\lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e $0.4 \neq 0$ qualunque sia λ.