Università Politecnica delle Marche - Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni
Teledidattica

ANALISI NUMERICA - TEMA A

(Prof. A. M. Perdon)

Ancona, 17 luglio 2006

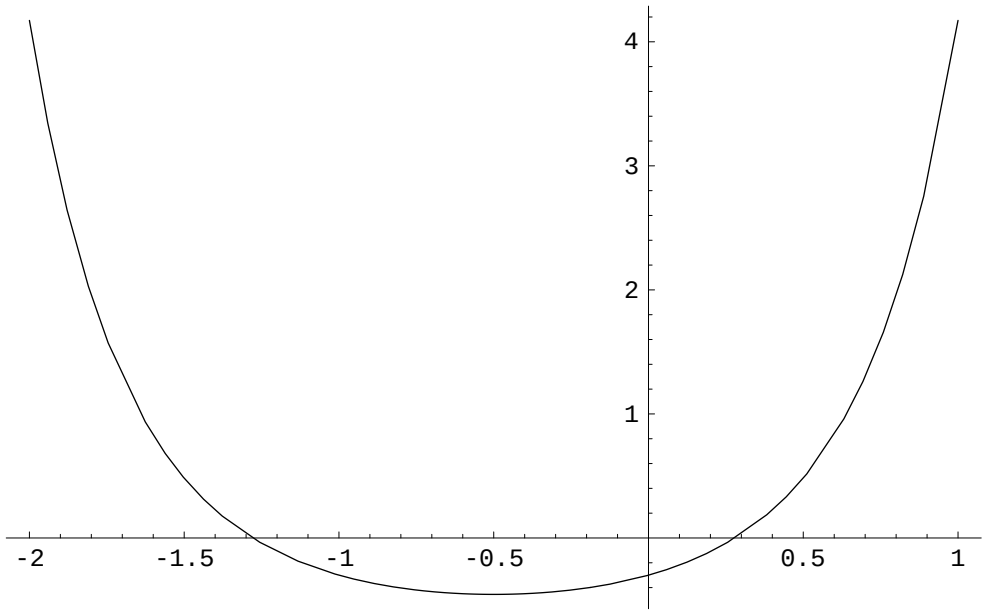
PARTE II.
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Determinare con il metodo della secante variabile tutte le radici dell'equazione

$$0.7e^{x^2+x} - 1. = 0$$

con quattro decimali esatti.

Risoluzione
Dal grafico della funzione $f(x) = 0.7e^{x^2+x} - 1.$, che ha come dominio $\mathbb{R}$



si evince che ci sono due radici, una in un intorno di 0.3, l'altra in un intorno di -1.3.

In questo caso, il metodo della secante variabile ha schema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = x_k - (0.7e^{x_k^2+x_k} - 1)\frac{x_k - x_{k-1}}{0.7e^{x_k^2+x_k} - 0.7e^{x_{k-1}^2+x_{k-1}})}$$

mentre l'errore si stima con il controllo dell'incremento $\epsilon_{k+1} \leq |x_{k+1} - x_k|$.

Possiamo prendere come punti iniziali $x_0 = 0.0$ e $x_1 = 1.0$, perché $f(0.0) \cdot f(1.0) = -1.2517 < 0$ (l'ipotesi di applicabilità è verificata), e si ha:

$x_0 =$	0.		
$x_1 =$	1.		
$x_2 =$	0.067079	$\epsilon_2 \leq$	0.932921
$x_3 =$	0.119431	$\epsilon_3 \leq$	0.0523525
$x_4 =$	0.336567	$\epsilon_4 \leq$	0.217136
$x_5 =$	0.265301	$\epsilon_5 \leq$	0.0712659
$x_6 =$	0.277801	$\epsilon_6 \leq$	0.0125
$x_7 =$	0.278915	$\epsilon_7 \leq$	0.0011136
$x_8 =$	0.278893	$\epsilon_8 \leq$	0.0000213

Una radice di $f(x)$ con 4 decimali esatti è $x = 0.2789$.

Prendendo invece come punti iniziali $x_0 = -2.0$ e $x_1 = -1.0$, dato che $f(-2.0) \cdot f(-1.0) = -1.2517 < 0$ (l'ipotesi di applicabilità è verificata), si ha:

$$\begin{array}{lll}
x_0 = & \text{-2.} & \\
x_1 = & \text{-1.} & \\
x_2 = & \text{-1.06708} & \epsilon_2 \leq \quad 0.067079 \\
x_3 = & \text{-1.38743} & \epsilon_3 \leq \quad 0.320349 \\
x_4 = & \text{-1.24513} & \epsilon_4 \leq \quad 0.142295 \\
x_5 = & \text{-1.27386} & \epsilon_5 \leq \quad 0.028730 \\
x_6 = & \text{-1.27914} & \epsilon_6 \leq \quad 0.005276 \\
x_7 = & \text{-1.27889} & \epsilon_7 \leq \quad 0.000247 \\
x_8 = & \text{-1.27889} & \epsilon_8 \leq \quad 0.000002
\end{array}$$

L'altra radice di $f(x)$ con 4 decimali esatti è $x = -1.2789$.

2. Data la matrice A,

$$A = \begin{pmatrix} 1.3125 & 1.375 & 0.6875 \\ 2.625 & -11.25 & -2.625 \\ -3.1875 & 22.375 & 5.1875 \end{pmatrix}$$

determinare l'autovettore corrispondente all'autovalore di modulo minimo con il metodo delle potenze inverse. Fare almeno 5 passi.

Risoluzione

Determiniamo l'autovalore di modulo minimo di A e il corrispondente autovettore, utilizzando l'algoritmo normalizzato del metodo delle potenze inverse:

Prendiamo z_0 vettore arbitrario, ad esempio $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per $k = 0, 1, ..., n$ faremo

$$\begin{array}{rcll}
\alpha_k & := & \|z_k\|_2 & \\
y_k & := & \dfrac{z_k}{\alpha_k} & (z_k \text{ normalizzato}) \\
z_{k+1} & := & A^{-1} y_k & \\
\sigma_k & := & y_k^T \cdot z_{k+1} & \\
\beta_k & := & \dfrac{1}{\sigma_k} & \\
\gamma_k & := & \dfrac{1}{\alpha_k} &
\end{array}$$

con $\beta_k \to \lambda_{|\min|}(A)$

Si ottengono i seguenti valori:

$$\sigma_0 = -0.277778 \quad z_1 = \begin{pmatrix} 0.817913 \\ 0.57735 \\ -1.87639 \end{pmatrix} \quad \beta_0 = -3.6$$

$$\sigma_1 = -1.73405 \quad z_2 = \begin{pmatrix} -0.139504 \\ -0.467529 \\ 1.76077 \end{pmatrix} \quad \beta_1 = -0.576685$$

$$\sigma_2 = -1.26372 \quad z_3 = \begin{pmatrix} 0.20395 \\ 0.350807 \\ -1.20203 \end{pmatrix} \quad \beta_2 = -0.791315$$

$$\sigma_3 = -1.36775 \quad z_4 = \begin{pmatrix} -0.174087 \\ -0.369951 \\ 1.30608 \end{pmatrix} \quad \beta_3 = -0.731127$$

$$\sigma_4 = -1.3215 \quad z_5 = \begin{pmatrix} 0.184311 \\ 0.360577 \\ -1.25804 \end{pmatrix} \quad \beta_4 = -0.756714$$

$$\sigma_5 = -1.3379 \quad z_6 = \begin{pmatrix} -0.180381 \\ -0.363795 \\ 1.2748 \end{pmatrix} \quad \beta_5 = -0.747442$$

Quindi l'autovalore di modulo minore di A è $\lambda_{|\min|}(A) \approx -0.75$, con autovettore associato $\widetilde{w} \simeq \begin{pmatrix} -0.180381 \\ -0.363795 \\ 1.2748 \end{pmatrix}$.

N.B. Anziché gli z_i, si può scrivere la successione dei vettori normalizzati y_i:

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{pmatrix}, \; y_1 = \begin{pmatrix} 0.38458 \\ 0.271468 \\ -0.882272 \end{pmatrix}, \; y_2 = \begin{pmatrix} -0.0763521 \\ -0.255883 \\ 0.963688 \end{pmatrix},$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 0.160758 \\ 0.276514 \\ -0.947469 \end{pmatrix}, \; y_4 = \begin{pmatrix} -0.127202 \\ -0.270317 \\ 0.954331 \end{pmatrix}, \; y_5 = \begin{pmatrix} 0.139459 \\ 0.272832 \\ -0.9519 \end{pmatrix}.$$

3. Data la funzione:

x	-1.5	0.5	2.5	4.5	6.5
$f(x)$	2.87	3.08	3.17	3.45	3.26

determinare il polinomio di grado due che meglio approssima $f(x)$, nel senso dei minimi quadrati. Scrivere tutti i passaggi.

Si tratta di determinare un polinomio di grado 2 $P(x) = ax^2 + bx + c$ che meglio approssima i dati, nel senso dei minimi quadrati.

Costruiamo il sistema $Ax = b$ corrispondente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 \\ 1 & x_4 & {x_4}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 2.25 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 2.5 & 6.25 \\ 1 & 4.5 & 20.25 \\ 1 & 6.5 & 42.25 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.87 \\ 3.08 \\ 3.17 \\ 3.45 \\ 3.26 \end{pmatrix}$$

Tale sistema è sovradeterminato e si può risolvere con due metodi: Equazioni normali o Decomposizione QR.

Scegliamo di utilizzare la decomposizione QR. Se $A = QR$, con Q matrice ortogonale ($Q^T \cdot Q = I$) e R matrice triangolare superiore,

$$Q = \begin{pmatrix} -0.447214 & -0.632456 & 0.534522 \\ -0.447214 & -0.316228 & -0.267261 \\ -0.447214 & 0 & -0.534522 \\ -0.447214 & 0.316228 & -0.267261 \\ -0.447214 & 0.632456 & 0.534522 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2.23607 & -5.59017 & -31.864 \\ 0. & 6.32456 & 31.6228 \\ 0. & 0. & 14.9666 \end{pmatrix}$$

risolviamo il sistema $Rx = Q^T b$:

$$\begin{pmatrix} 2.23607 & 10.2859 & 60.3738 \\ 0. & 5.4037 & 48.1152 \\ 0. & 0. & 11.7869 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.07939 \\ 0.363662 \\ -0.163029 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema triangolare superiore e si risolve facilmente per sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-0.163029}{11.7869} = -0.0108929 \\ b &= \frac{0.363662 - 48.1152 \cdot (-0.0108929)}{5.4037} = 0.111964 \\ c &= \frac{-7.07939 - 10.2859 \cdot (0.111964) - 60.3738 \cdot (-0.0108929)}{2.23607} = 3.04131 \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di grado 2 che approssima i dati ai sensi dei minimi quadrati è:

$$P(x) = -0.0108929x^2 + 0.111964x + 3.04131$$

N.B. Anziché la decomposizione QR, si possono utilizzare le "equazioni normali" $A^T Ax = A^T b$:

$$\begin{pmatrix} 5. & 12.5 & 71.25 \\ 12.5 & 71.25 & 378.125 \\ 71.25 & 378.125 & 2239.31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.83 \\ 41.875 \\ 234.638 \end{pmatrix}$$

e risolvere il sistema con il metodo di Gauss.

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata l'uguaglianza:

$$(457.2)_8 = (x)_6$$

Risoluzione

Per cambiare la rappresentazione di un numero da una base all'altra, bisogna passare per la base 10.

Per ottenere la rappresentazione in base 10, basta sommare i prodotti di ciascuna cifra per la potenza della base 6 corrispondente alla posizione:

$$\begin{aligned} x &= 4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 7 + \frac{2}{8} = \\ &= 303.25 \end{aligned}$$

Ora passiamo dalla base 10 alla base 6. Si procede separatamente per la parte intera e quella frazionaria.

Dividiamo la parte intera per 6 e prendiamo nota dei resti, finché il quoziente sarà 0.

$$\begin{aligned} 303 : 6 &= 50 \quad r.3 \\ 50 : 6 &= 8 \quad r.2 \\ 8 : 6 &= 1 \quad r.2 \\ 1 : 6 &= 0 \quad r.1 \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la parte decimale per 6 e prendiamo nota delle parti intere, finché la parte frazionaria sarà 0 o si ripeterà:

$$\begin{aligned} 0.25 \cdot 6 &= 1.5 \\ 0.5 \cdot 6 &= 3.0 \end{aligned}$$

Quindi $x = 1223.13$.