Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Laurea in Ing. Elettronica (VO)
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - Primo Parziale - TEMA A

(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 28 Maggio 2004

PARTE I.

1. Se l'equazione $f(x) = 0$ ha una radice nell'intervallo $[1.4; 3.4]$, per determinare con il metodo dicotomico la radice con due decimali esatti possiamo fermarci dopo

☒ 8 passi ☐ 10 passi ☐ 13 passi

Perché?

$$\begin{aligned}
\epsilon_k \leq \frac{3.4-1.4}{2^{k+1}} &\leq 0.5 \cdot 10^{-2} \\
\frac{2}{2^{k+1}} &\leq 0.5 \cdot 10^{-2} \\
\frac{1}{2^k} &\leq 0.5 \cdot 10^{-2} \\
\frac{1}{0.5 \cdot 10^{-2}} &\leq 2^k \\
2 * 10^2 &\leq 2^k \\
2^k &\geq 200 \\
k &\geq \log_2(200) = 7.64386 \\
k = 8 &
\end{aligned}$$

Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Laurea in Ing. Elettronica (VO)
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - Primo Parziale - TEMA A
(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 28 Maggio 2004

PARTE II.

1. Costruire la successione di Sturm per il polinomio:

$$P(x) = 0.5x^4 - x^3 - x^2 - 1.5x$$

Il termine noto è nullo, quindi raccogliamo dapprima il fattore comune x:

$$P(x) = x \cdot (0.5x^3 - x^2 - x - 1.5)$$

e applichiamo Sturm solo al secondo fattore.

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 0.5x^3 - x^2 - x - 1.5 \\ p_1(x) &= -1.5x^2 + 2x + 1 \\ p_2(x) &= x + 1.55 \\ p_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

2. Dato il polinomio $P(x) = 0.5x^4 - x^3 - x^2 - 1.5x$, determinare:

   (a) la regione del piano di Gauss contenente tutte le radici di $P(x)$ e gli intervalli di $\mathbb{R}$ in cui si trovano le radici reali;

   (b) Determinare quante sono le radici reali di $P(x)$;

   (c) Calcolare tutte le radici di $P(x)$ con almeno quattro decimali esatti.

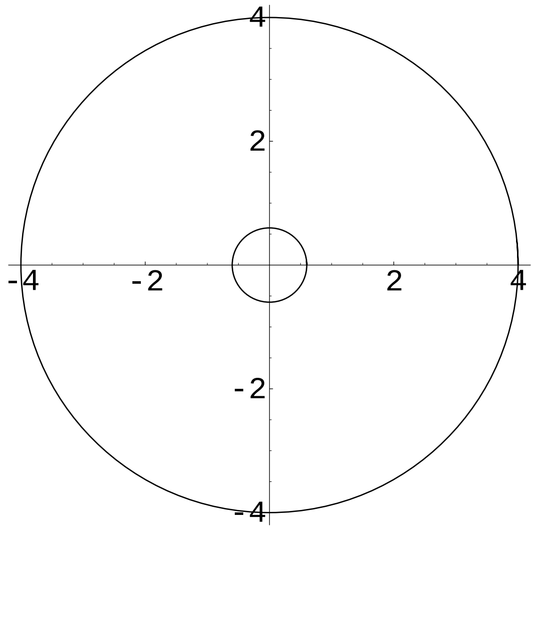
(a)

$$\lambda = \max_{i=1,..,n} \frac{|a_i|}{|a_0|} = \frac{1.5}{0.5} = 3$$

$$\mu = \max_{i=0,..,n-1} \frac{|a_i|}{|a_n|} = \frac{1}{1.5} = 0.666667$$

Una radice è $x_1 = 0$; la regione del piano di Gauss che contiene tutte le altre radici, reali e complesse, di $P(x)$, è:

$$\frac{1}{1 + 0.666667} = 0.6 \le |z| \le 4 = 1 + 3$$



Le radici reali di $P(x)$ si trovano nell'intersezione della retta reale con il piano di Gauss, cioè in

$$[-4; -0.6] \bigcup [0.6; 4]$$

(b) Per determinare quante sono le radici reali di $P(x)$, studiamo ora i segni assunti dalla successione di Sturm a $-\infty, 0, +\infty$:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 0.5x^3 - x^2 - x - 1.5 \\ p_1(x) &= -1.5x^2 + 2x + 1 \\ p_2(x) &= x + 1.55 \\ p_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$p_0(x)$	$-$	$-$	$+$
$p_1(x)$	$-$	$+$	$-$
$p_2(x)$	$-$	$+$	$+$
$p_3(x)$	$+$	$+$	$+$
	$w(-\infty) = 1$	$w(0) = 1$	$w(+\infty) = 2$

Poiché $w(0) - w(-\infty) = 1 - 1 = 0$, non ci sono radici reali negative.
Poiché $w(+\infty) - w(0) = 2 - 1 = 1$, c'è UNA radice reale positiva che deve appartenere a $[0.6; 4]$
L'intervallo $[0.6; 4]$ è abbastanza ampio, conviene raffinare la nostra ricerca,
studiando i segni assunti dalla successione di Sturm nel punto medio $M = \frac{4+0.6}{2} = 2.3$ e a $0, +\infty$:

	0.6	2.3	4
$p_0(x)$	$-$	$-$	$+$
$p_1(x)$	$+$	$-$	$-$
$p_2(x)$	$+$	$+$	$+$
$p_3(x)$	$+$	$+$	$+$
	$w(0.6) = 1$	$w(2.3) = 1$	$w(4) = 2$

Dunque la radice si troverà nell'intervallo $[2.3; 4]$.
Utilizziamo ad esempio il metodo di Newton-Raphson, con punto iniziale

$$x_0 = \frac{2.3 + 4}{2} = 3.15$$

e schema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)} = x_k + \frac{p_0(x_k)}{p_1(x_k)}:$$

Stimiamo l'errore, calcolando: $m = \left| \frac{p_0(x) \cdot p_0''(x)}{\left(p_0'(x)\right)^2} \right|_{3.15} = 0.136716 \implies \frac{m}{1-m} = 0.158368 \approx 0.16$

$$\begin{aligned} x_0 &= 3.15 \\ x_1 &= 3.010829075 & \epsilon_0 &\le \tfrac{m}{1-m}|x_1 - x_0| = 0.02226735 \\ x_2 &= 3.000062608 & \epsilon_1 &\le \tfrac{m}{1-m}|x_2 - x_1| = 0.00172263 \\ x_3 &= 3.000000002 & \epsilon_2 &\le \tfrac{m}{1-m}|x_3 - x_2| = 0.00001002 \end{aligned}$$

Quindi un'approssimazione della radice reale non nulla di $P(x)$ con 4 decimali esatti è 3.0000. Se vogliamo determinare le radici complesse di

$$P(x) = 2x^3 - 8.13x^2 + 18.42x - 1.17,$$

dividiamo $p_0(x) = 0.5x^3 - x^2 - x - 1.5$ per il binomio $x - 3.0000$, tramite il metodo di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +0.5 & -1 & -1 & -1.5 \\ 3 & & +1.5 & +1.5 & +1.5 \\ \hline & +0.5 & +0.5 & +0.5 & // \end{array}$$

Quindi $P(x) = x(x - 3.0000)(0.5x^2 + 0.5x + 0.5) = 0.5x(x - 3.0000)(x^2 + x + 1)$.
Ora troviamo le soluzioni di $x^2 + x + 1 = 0$ mediante la formula risolutiva delle equazioni di II grado:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \tfrac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \tfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \\ &= \tfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \tfrac{-1 \pm i1.73205}{2} = \\ &= -0.5 \pm i\ 0.866025 \end{aligned}$$

Risultato: $x_1 = 0$, $x_2 = 3.0000$, $x_3 = -0.5 + i\ 0.8660$, $x_4 = -0.5 - i\ 0.8660$

3. Risolvere con il metodo di Gauss il seguente sistema:

$$\begin{cases} 100x + 74y + 29z = -1.6 \\ x - 0.02y + 0.0005z = 0.2119 \\ 37x + 42y - 12z = 113.88 \end{cases}$$

Scrivere tutti i passaggi.

Il sistema si può scrivere come $A\underline{x} = b$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 74 & 29 \\ 1 & -0.02 & 0.0005 \\ 37 & 42 & -12 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1.6 \\ 0.2119 \\ 113.88 \end{pmatrix}$$

Scriviamo la matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 74 & 29 & -1.6 \\ 1 & -0.02 & 0.0005 & 0.2119 \\ 37 & 42 & -12 & 113.88 \end{array}\right)$$

Dal momento che la seconda riga presenta valori di grandezza molto minori rispetto alle altre due, conviene fare il bilanciamento, cioè moltiplicare la seconda riga per una costante, ad esempio 10^2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 74 & 29 & -1.6 \\ 100 & -2 & 0.05 & 21.19 \\ 37 & 42 & -12 & 113.88 \end{array}\right)$$

Applichiamo ora il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 74 & 29 & -1.6 \\ 100 & -2 & 0.05 & 21.19 \\ 37 & 42 & -12 & 113.88 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - \frac{37}{100}R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 74 & 29 & -1.6 \\ 0 & -76 & -28.95 & 22.79 \\ 0 & 14.62 & -22.73 & 114.472 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 74 & 29 & -1.6 \\ 0 & -76 & -28.95 & 22.79 \\ 0 & 14.62 & -22.73 & 114.472 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ R_3 + \frac{14.62}{76}R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 74 & 29 & -1.6 \\ 0 & -76 & -28.95 & 22.79 \\ 0 & 0 & -28.2991 & 118.856 \end{array}\right)$$

Per sostituzione all'indietro, si ha:

$$\begin{array}{rcl} -28.2991z & = & 118.856 \\ z & = & \frac{118.856}{-28.2991} = -4.199992 \\ \\ -76y - 28.95z & = & 22.79 \\ y & = & \frac{22.79+28.95\cdot(-4.19999)}{-76} = 1.3 \\ \\ 100x + 74y + 29z & = & -1.6 \\ x & = & \frac{-1.6-74\cdot 1.3-29\cdot -4.19999}{100} = 0.239998 \end{array}$$

Quindi la soluzione approssimata sarebbe $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0.239998 \\ 1.3 \\ -4.199992 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.2400 \\ 1.3000 \\ -4.2000 \end{pmatrix}$

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata l'uguaglianza:

$$(136)_{10} = (253)_x$$

$2x^2 + 5x + 3 = 136$ ha come soluzioni 7 e $-\frac{19}{2}$; è accettabile solo $x = 7$.

Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Laurea in Ing. Elettronica (VO)
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - Primo Parziale - TEMA B

(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 28 Maggio 2004

PARTE II.

1. Trovare la radice dell'equazione $e^{x^2} - 3x = 0$ contenuta nell'intervallo $[0; 0.5]$ con 4 decimali esatti, utilizzando uno dei seguenti schemi di punto fisso:

$$a)\ y = \sqrt{\log(3x)} \qquad\qquad b)\ y = \frac{e^{x^2}}{3}$$

Ipotesi: $g_1(x) = \sqrt{\log(3x)}$ derivabile con derivata $g_1'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\log(3x}}$ definita e continua su [0.34;0.5], inoltre, tra $[0.34; 0.5]$ vale $g_1'(x) \geq 1.5704$, quindi $g_1(x)$ diverge.

Ipotesi: $g_2(x) = \frac{e^{x^2}}{3}$ derivabile con derivata $g_2'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{3}$ continua su $[0; 0.5]$, dove vale $g_2'(x) \leq m = 0.4280$, quindi $g_2(x)$ converge.

Il punto iniziale sarà il punto medio di $[0; 0.5]$, cioè 0.25.
L'errore al passo n-esimo si stima

$$\epsilon_k \leq \frac{m}{1-m}|x_{k+1} - x_k| = \frac{0.4280}{1-0.4280}|x_{k+1} - x_k| \approx 0.75 \cdot |x_{k+1} - x_k|$$

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0.25 & \\ x_1 = 0.354831486 & \epsilon_0 \leq 0.75|x_1 - x_0| = 0.0786236 \\ x_2 = 0.378058284 & \epsilon_1 \leq 0.75|x_2 - x_1| = 0.0174201 \\ x_3 = 0.384548937 & \epsilon_2 \leq 0.75|x_3 - x_2| = 0.0048680 \\ x_4 = 0.386457104 & \epsilon_3 \leq 0.75|x_4 - x_3| = 0.0014311 \\ x_5 = 0.387026081 & \epsilon_4 \leq 0.75|x_5 - x_4| = 0.0004267 \\ x_6 = 0.387196446 & \epsilon_5 \leq 0.75|x_6 - x_5| = 0.0001278 \\ x_7 = 0.387247521 & \epsilon_6 \leq 0.75|x_7 - x_6| = 0.0000383 \end{array}$$

La radice cercata, con 4 decimali esatti, è 0.3872.

2. Stimare l'indice di condizionamento, con la norma $\|\cdot\|_\infty$, della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1.5 & -1.67 \\ 0 & 2.124 & -1.374 & -1 \\ -1.45 & -2.32 & 3.74 & 0.2 \\ -1 & -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

L'indice di condizionamento, con la norma $\|\cdot\|_\infty$, di una matrice non singolare A è la quantità

$$k(A) := \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

Si vede facilmente che $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{4} |a_{ij}| = 10$.
Anzichè calcolare $\|A^{-1}\|_\infty$ che richiederebbe di determinare l'inversa di A, sapendo che $\|A^{-1}\|_\infty = \sup_{y\neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|_\infty}{\|y\|_\infty}$ possiamo stimare per difetto $\|A^{-1}\|_\infty$ calcolando

$$\max_{i=1,\ldots,k} \frac{\|y_i\|_\infty}{\|Ay_i\|_\infty},$$

con $y_1, \ldots, y_k$ ($k = 5, 6$ almeno) vettori arbitrari.

3. Determinare l'inversa della seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0.5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0. & -0.138777878 \cdot 10^{-16} \\ -0.7 & 0.5 & 0.55511 \cdot 10^{-16} \\ 0.3 & -0.22222 & 0.11111 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.2 & 0. & 0. \\ -0.7 & 0.5 & 0. \\ 0.3 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Facoltativo: Risolvere l'esercizio n.1 con il metodo di Newton-Raphson.

Punto iniziale: $x_0 = 0.25$ e schema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - 3x_k}{2x_k e^{x_k^2} - 3}$$

con $m \approx 0.4280$ e $\frac{m}{1-m} \approx 0.75$.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.25 & & \\
x_1 &= 0.377441639 & \epsilon_0 &\leq \tfrac{m}{1-m}|x_1 - x_0| = 0.09558123 \\
x_2 &= 0.387201773 & \epsilon_1 &\leq \tfrac{m}{1-m}|x_2 - x_1| = 0.0073201 \\
x_3 &= 0.387269399 & \epsilon_2 &\leq \tfrac{m}{1-m}|x_3 - x_2| = 0.507196 \cdot 10^{-4} \\
x_4 &= 0.387269402 & \epsilon_3 &\leq \tfrac{m}{1-m}|x_4 - x_3| = 0.246642 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}$$

Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Laurea in Ing. Elettronica (VO)
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - Primo Parziale - TEMA C

(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 28 Maggio 2004

PARTE II.

1. Determinare la soluzione del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + 5z + 4t = 17 \\ 7x + 4y + 2t = 13 \\ -x - y + 2z - 2t = -4 \end{cases}$$

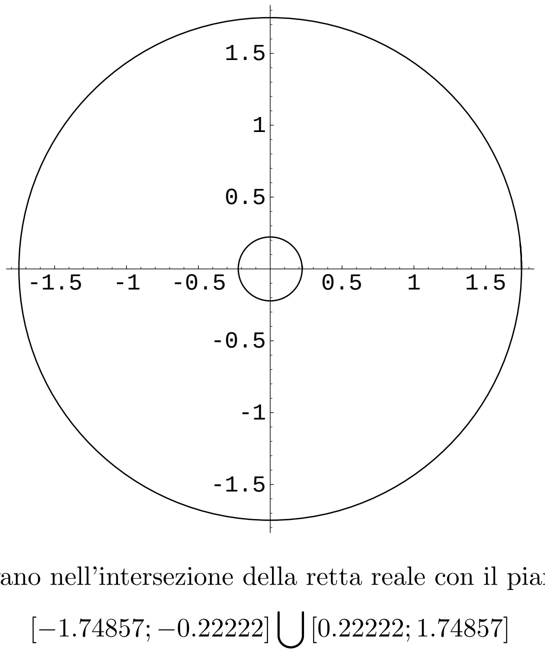
La soluzione dipende da un parametro. Se prendiamo come parametro t, si ottiene: $\begin{pmatrix} 16.7778 - 6.8889t \\ -26.1111 + 11.5556t \\ -6.6667 + 3.3333t \\ t \end{pmatrix}$

2. Determinare e disegnare la regione del piano complesso che contiene le radici del seguente polinomio:

$$P(x) = 7x^5 + 4x^4 + 3.6x^3 - 0.245x^2 + 5.24x + 2$$

$\lambda = \frac{5.24}{7} = 0.74857$, $\mu = \frac{7}{2} = 3.5$, quindi la regione del piano di Gauss che contiene tutte le radici, reali e complesse, di $P(x)$, è:

$$\frac{1}{1+3.5} = 0.22222 \le |z| \le 1.74857 = 1 + 0.74857$$



Le radici reali di $P(x)$ si trovano nell'intersezione della retta reale con il piano di Gauss, cioè in

$$[-1.74857; -0.22222] \bigcup [0.22222; 1.74857]$$

3. Usando il metodo di Newton-Raphson, determinare la radice dell'equazione

$$\cos(x) = \log(x)$$

nell'intervallo $[1, 1.5]$ con 5 decimali esatti.

Punto iniziale:

$$x_0 = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

e schema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\cos(x_k) - \log(x_k)}{-\sin(x_k) - \frac{1}{x_k}}$$

Stimiamo l'errore, calcolando $m = \left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right|_{1.25} = 0.00978389 \implies \frac{m}{1-m} = 0.00988056 \approx 0.01.$

$$\begin{aligned}
&x_0 = 1.25 \\
&x_1 = 1.302704186 \qquad \epsilon_0 \leq \frac{m}{1-m}|x_1 - x_0| = 0.000527042 \\
&x_2 = 1.302963995 \qquad \epsilon_1 \leq \frac{m}{1-m}|x_2 - x_1| = 0.259809 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

Quindi la radice dell'equazione in $[1, 1.5]$ con 5 decimali esatti è $\alpha \approx 1.30296$.

Facoltativo: Determinare la frazione generatrice in base 10 del seguente numero periodico:

$$\left(4.5\overline{AB}\right)_{16}$$

$$\left(4.5\overline{AB}\right)_{16} = \left(\frac{45AB - 45}{FF0}\right)_{16} = \left(\frac{4 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16 + 11 - (4 \cdot 16 + 5)}{15 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16}\right)_{10} = \left(\frac{17766}{4080}\right)_{10} = \left(\frac{2961}{680}\right)_{10}$$

Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Laurea in Ing. Elettronica (VO)
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

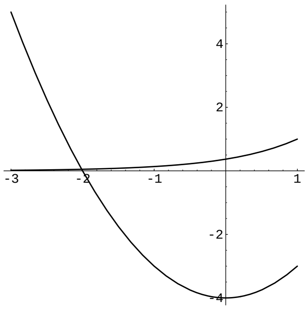
ANALISI NUMERICA - Primo Parziale - TEMA D
(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 28 Maggio 2004

PARTE II.

1. Trovare il valore approssimato, con cinque decimali esatti, della radice dell' equazione

$$e^{(x-1)} - x^2 + 4 = 0.$$



Utilizziamo Newton-Raphson, con punto iniziale $x_0 = -2.$ e schema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{(x_k-1)} - x_k^2 + 4}{e^{(x_k-1)} - 2x_k}.$$

Stimiamo l'errore, calcolando: $m = \left| \frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right|_{-2} = 0.00592017 \implies \frac{m}{1-m} = 0.00595543 \approx 0.006$

x_0= -2.
x_1= -2.012293749653344 $\quad \epsilon_0 \le \frac{m}{1-m}|x_1 - x_0| = 0.0000737625$
x_2= -2.012257569537475 $\quad \epsilon_1 \le \frac{m}{1-m}|x_2 - x_1| = 0.2170807 \cdot 10^{-6}$

$x \approx -2.01226$ (5 decimali esatti, come richiesto) o anche $x \approx -2.012258$ (6 decimali esatti, visto che li abbiamo).

2. Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} -5x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} | x_3,\ x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \langle\ x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

3. Determinare x ed y in modo che sia verificata la seguente uguaglianza:

$$(4)_6 * (512)_6 = (x)_{10} = (y)_4$$

$$4 \cdot (5 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 2) = 4 \cdot 188 = 752 \implies x = 752$$
$$(752)_{10} = (23300)_4 \implies y = 23300$$

Facoltativo: Determinare $a + b$ eseguendo la somma in base 10 con mantissa normalizzata di 4 cifre con

$$a = 1.67893 \quad \text{e} \quad b = 26.0120134.$$

$$\begin{aligned} a = 1.67893 &= 0.167893 \cdot 10 \;\blacktriangleright 0.1679 \cdot 10 \\ b = 26.0120134 &= 0.260120134 \cdot 10^2 \blacktriangleright 0.2601 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b = 0.1679 \cdot 10 + 0.2601 \cdot 10^2 &= 0.01679 \cdot 10^2 + 0.2601 \cdot 10^2 \\ &= 0.27689 \cdot 10^2 \blacktriangleright 0.2769 \cdot 10^2 = 27.69 \end{aligned}$$