Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - TEMA D

(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 20 Luglio 2004

PARTE II.
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

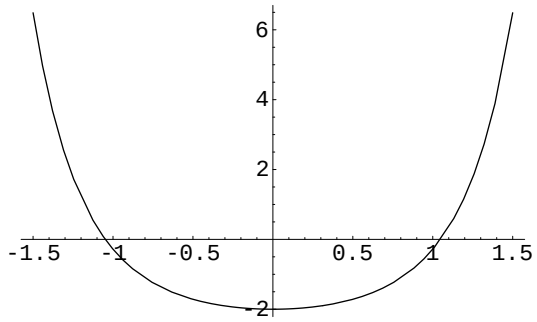
1. Determinare con il metodo della secante variabile tutte le radici dell'equazione

$$e^{x^2} - 3 = 0$$

con cinque decimali esatti.

Risoluzione

Per prima cosa cerchiamo di individuare un intervallo reale in cui vi sia una sola radice, e per questo tracciamo il grafico di $f(x) = e^{x^2} - 3$.



Dal grafico si evince che le radici dell'equazione sono una, positiva, nell'intervallo $[0.9, 1.2]$ e l'altra, negativa, nell'intervallo $[-1.2, -0.9]$.

Osserviamo che la funzione è pari, per cui possiamo limitarci a studiarne l'andamento nel semipiano $x \geq 0$.

Prendendo come valori iniziali $x_0 = 0.9$ e $x_1 = 1.2$, si ha:

$$f(0.9) \cdot f(1.2) = (-0.752092)(1.2207) = -0.918076 < 0.$$

Quindi la condizione iniziale è verificata.

Schema iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - (e^{x_n^2} - 3) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{e^{x_n^2} - e^{x_{n-1}^2}}$$

L'errore si può stimare come: $\epsilon_{n+1} \leq |x_{n+1} - x_n|$.

$$\begin{array}{lll} x_0 = & 0.9 & \\ x_1 = & 1.2 & \\ x_2 = & 1.01437 & \epsilon_2 \leq \quad 0.18563 \\ x_3 = & 1.04071 & \epsilon_3 \leq \quad 0.263435 \cdot 10^{-1} \\ x_4 = & 1.04854 & \epsilon_4 \leq \quad 0.782278 \cdot 10^{-2} \\ x_5 = & 1.04814 & \epsilon_5 \leq \quad 0.393555 \cdot 10^{-3} \\ x_6 = & 1.04815 & \epsilon_6 \leq \quad 0.442129 \cdot 10^{-5} \end{array}$$

Un'approssimazione della radice $\in [0.9, 1.2]$ di $f(x) = e^{x^2} - 3$ con 5 decimali esatti è $x = 1.04815$.

Per simmetria, un'approssimazione con 5 decimali esatti della radice di $f(x)$ in $[-1.2, -0.9]$ sarà $x = -1.04815$.

2. Data la matrice A,

$$A = \begin{pmatrix} 1. & -0.6 & 2.5 \\ -4. & 3.5 & 2.5 \\ 7. & -0.5 & -4.5 \end{pmatrix}$$

determinare l'autovettore corrispondente all'autovalore di modulo minimo con il metodo delle potenze inverse. Fare almeno 5 passi.

Risoluzione

Determiniamo l'autovalore di modulo minimo di A e il corrispondente autovettore, utilizzando l'algoritmo normalizzato del metodo delle potenze inverse:

Prendiamo z_0 vettore arbitrario, ad esempio $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per $k = 0, 1, ..., n$ faremo

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= \|z_k\|_2 \\ y_k &:= \frac{z_k}{\alpha_k} \qquad (z_k \text{ normalizzato}) \\ z_{k+1} &:= A^{-1} y_k \\ \sigma_k &:= y_k^T \cdot z_{k+1} \\ \beta_k &:= \frac{1}{\sigma_k} \\ \gamma_k &:= \frac{1}{\alpha_k} \end{aligned}$$

Si ottengono i seguenti valori:

$$\begin{array}{lll} \sigma_0 = 0.420156 & z_1 = \begin{pmatrix} 0.235202 \\ 0.286831 \\ 0.205699 \end{pmatrix} & \beta_0 = 2.38007 \\ \sigma_1 = 0.42654 & z_2 = \begin{pmatrix} 0.222607 \\ 0.301161 \\ 0.205045 \end{pmatrix} & \beta_1 = 2.34444 \\ \sigma_2 = 0.425238 & z_3 = \begin{pmatrix} 0.21673 \\ 0.309179 \\ 0.196061 \end{pmatrix} & \beta_2 = 2.35163 \\ \sigma_3 = 0.424543 & z_4 = \begin{pmatrix} 0.212643 \\ 0.312321 \\ 0.193667 \end{pmatrix} & \beta_3 = 2.35547 \\ \sigma_4 = 0.423979 & z_5 = \begin{pmatrix} 0.21069 \\ 0.314199 \\ 0.191464 \end{pmatrix} & \beta_4 = 2.35861 \\ \sigma_5 = 0.423652 & z_6 = \begin{pmatrix} 0.209526 \\ 0.315063 \\ 0.190572 \end{pmatrix} & \beta_5 = 2.36043 \end{array}$$

Quindi l'autovalore di modulo minore di A è $\lambda_{|\min|}(A) \approx 2.3$, con autovettore associato $\widetilde{w} \simeq \begin{pmatrix} 0.209526 \\ 0.315063 \\ 0.190572 \end{pmatrix}$.

N.B. Anziché gli z_i, si può scrivere la successione dei vettori normalizzati y_i:

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{pmatrix},\ y_1 = \begin{pmatrix} 0.554523 \\ 0.676248 \\ 0.484966 \end{pmatrix},\ y_2 = \begin{pmatrix} 0.521376 \\ 0.70536 \\ 0.480244 \end{pmatrix},\ y_3 = \begin{pmatrix} 0.509419 \\ 0.726719 \\ 0.460838 \end{pmatrix},\ y_4 = \begin{pmatrix} 0.500831 \\ 0.735599 \\ 0.456138 \end{pmatrix},\ y_5 = \begin{pmatrix} 0.496918 \\ 0.741048 \\ 0.451575 \end{pmatrix}.$$

3. Data la funzione:

x	1	3	5	6	8
$f(x)$	3.78	3.40	2.80	2.15	0.64

determinare il polinomio di grado due che meglio approssima $f(x)$, nel senso dei minimi quadrati. Scrivere tutti i passaggi.

Risoluzione

Si tratta di determinare un polinomio di grado 2 $P(x) = ax^2 + bx + c$ che meglio approssima i dati, nel senso dei minimi quadrati.

Costruiamo il sistema $Ax = b$ corrispondente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 \\ 1 & x_4 & {x_4}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 8 & 64 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3.78 \\ 3.40 \\ 2.80 \\ 2.15 \\ 0.64 \end{pmatrix}$$

Tale sistema è sovradeterminato e si può risolvere con due metodi: Equazioni normali o Decomposizione QR.

Scegliamo di utilizzare la decomposizione QR. Se $A = QR$, con Q matrice ortogonale ($Q^T \cdot Q = I$) e R matrice triangolare superiore,

$$Q = \begin{pmatrix} 0.447214 & -0.66621 & 0.513688 \\ 0.447214 & -0.296093 & -0.31844 \\ 0.447214 & 0.0740233 & -0.471849 \\ 0.447214 & 0.259082 & -0.294034 \\ 0.447214 & 0.629198 & 0.570635 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2.23607 & 10.2859 & 60.3738 \\ 0. & 5.4037 & 48.1152 \\ 0. & 0. & 11.7869 \end{pmatrix}$$

risolviamo il sistema $Rx = Q^T b$:

$$\begin{pmatrix} 2.23607 & 10.2859 & 60.3738 \\ 0. & 5.4037 & 48.1152 \\ 0. & 0. & 11.7869 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.71092 \\ -2.35801 \\ -0.729099 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema triangolare superiore e si risolve facilmente per sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-0.729099}{11.7869} = -0.0618566 \\ b &= \frac{-2.35801 - 48.1152 \cdot (-0.0618566)}{5.4037} = 0.114408 \\ c &= \frac{5.71092 - 10.2859 \cdot (0.114408) - 60.3738 \cdot (-0.0618566)}{2.23607} = 3.69785 \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di grado 2 che approssima i dati ai sensi dei minimi quadrati è:

$$P(x) = -0.0618566x^2 + 0.114408x + 3.69785.$$

N.B. Anziché la decomposizione QR, si possono utilizzare le "equazioni normali" $A^T Ax = A^T b$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 23 & 135 \\ 23 & 135 & 881 \\ 135 & 881 & 6099 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.77 \\ 46. \\ 222.74 \end{pmatrix}$$

e risolvere il sistema con il metodo di Gauss.

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata l'uguaglianza:

$$(2015.43)_6 = (x)_8$$

Risoluzione

Per cambiare la rappresentazione di un numero da una base all'altra, bisogna passare per la base 10.

Per ottenere la rappresentazione in base 10, basta sommare i prodotti di ciascuna cifra per la potenza della base 6 corrispondente alla posizione:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6 + 5 + \frac{4}{6} + \frac{3}{6^2} = \\ &= 443.75 \end{aligned}$$

Ora passiamo dalla base 10 alla base 8. Si procede separatamente per la parte intera e quella frazionaria.

Dividiamo la parte intera per 8 e prendiamo nota dei resti, finché il quoziente sarà 0.

$$\begin{aligned} 443 : 8 &= 55 \quad r.3 \\ 55 : 8 &= 6 \quad r.7 \\ 6 : 8 &= 0 \quad r.6 \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la parte decimale per 8 e prendiamo nota delle parti intere, finché la parte frazionaria sarà 0 o si ripeterà:

$$0.75 \cdot 8 = 6.0$$

Quindi $x = 673.6$.