Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - TEMA B

(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 20 Luglio 2004

PARTE II.
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Determinare con il metodo di Newton-Raphson tutte le radici dell'equazione

$$-0.2(x-1)^3 \cdot \log\left(0.2(x-1)^2+0.1\right)=0$$

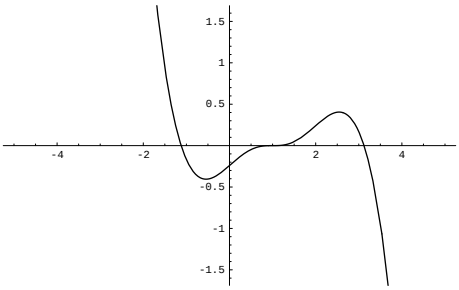
con cinque decimali esatti.

Risoluzione

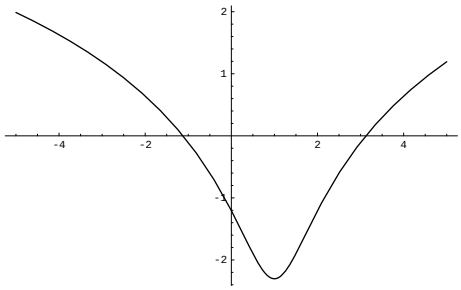
Osserviamo per prima cosa che la funzione può essere scissa nel prodotto di $-0.2(x-1)^3$ per $\log\left(0.2(x-1)^2+0.1\right)$ e quindi ha sicuramente $x=1$ come radice di molteplicità 3, perchè il primo fattore si annulla se e solo se $x=1$.

Cerchiamo dunque le radici del secondo fattore: $f(x)=\log\left(0.2(x-1)^2+0.1\right)$.

Per prima cosa cerchiamo di individuare un intervallo reale in cui vi sia <u>una sola radice</u>, e per questo tracciamo il grafico di $f(x)$.



$y=-0.2(x-1)^3\cdot\log\left(0.2(x-1)^2+0.1\right)$



$y=\log\left(0.2(x-1)^2+0.1\right)$

Da entrambi i grafici si evince che le radici dell'equazione diverse da $x=1$ sono una nell'intervallo $[-1.5,-0.5]$, l'altra nell'intervallo $[2.5,3.5]$.

$f(x)=\log\left(0.2(x-1)^2+0.1\right)$ è derivabile con derivata $f'(x)=\frac{0.4x-0.4}{0.2x^2-0.4x+0.3}$ continua (il denominatore non ha radici reali). La derivata si annulla solo per $x=1$, cioè su nessuno dei due intervalli che vogliamo considerare.

Lo schema iterativo sarà pertanto:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{(0.5{x_k}^2-x_k+0.75)\cdot\log\left(0.2(x_k-1)^2+0.1\right)}{x_k-1}.$$

Partiamo dall'intervallo $[-1.5,-0.5]$.

Prendiamo come punto iniziale: $x_0=-1\ \in[-1.5,-0.5]$.

Poichè

$$m\approx\left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right|_{x=-1.}=0.0460952<1,$$

$x_0=-1$ è un buon punto iniziale, e

$$\frac{m}{1-m}=0.0483227,$$

quindi l'errore si può stimare come $\epsilon_k\le\frac{m}{1-m}|x_{k+1}-x_k|=0.0483227|x_{k+1}-x_k|$

$$
\begin{array}{lll}
x_0 = & \text{-1.0} & \\
x_1 = & \text{-1.11853} & \epsilon_1 \leq \quad 0.573 \cdot 10^{-2} \\
x_2 = & \text{-1.12132} & \epsilon_2 \leq \quad 0.135 \cdot 10^{-3} \\
x_3 = & \text{-1.12132} & \epsilon_3 \leq \quad 0.709 \cdot 10^{-7}
\end{array}
$$

Un'approssimazione della radice $\in [-1.5, -0.5]$ di $f(x)$ con 6 decimali esatti è $x = -1.121320$.

Ora consideriamo l'intervallo $[2.5, 3.5]$.

Prendiamo come punto iniziale: $x_0 = 3 \ \in [2.5, 3.5]$.

Poichè

$$
m \approx \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right|_{x=3.} = 0.0460952 < 1,
$$

$x_0 = 3$ è un buon punto iniziale, e

$$
\frac{m}{1-m} = 0.0483227,
$$

quindi l'errore si può stimare come $\epsilon_k \leq \frac{m}{1-m}|x_{k+1} - x_k| = 0.0483227|x_{k+1} - x_k|$

$$
\begin{array}{lll}
x_0 = & 3.0 & \\
x_1 = & 3.11853 & \epsilon_1 \leq \quad 0.573 \cdot 10^{-2} \\
x_2 = & 3.12132 & \epsilon_2 \leq \quad 0.135 \cdot 10^{-3} \\
x_3 = & 3.12132 & \epsilon_3 \leq \quad 0.709 \cdot 10^{-7}
\end{array}
$$

Un'approssimazione della radice $\in [2.5, 3.5]$ di $f(x)$ con 6 decimali esatti è $x = 3.121320$.

Quindi tutte le radici di $f(x)$ con cinque decimali esatti sono: $-1.12132, \ +1, \ +3.12132$.

2. Risolvere il sistema $A\bar{x} = b$, con

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 3.78 & 5 & 1 \\ 3 & 3.4 & 2 & 4 \\ 5 & 2.8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.15 \\ 5 \end{pmatrix}.
$$

Scrivere tutti i passaggi.

Risoluzione

Il sistema è sottodeterminato. Cerchiamo di determinare il rango di A. Poichè

$$
\begin{vmatrix} 1 & 3.78 & 5 \\ 3 & 3.4 & 2 \\ 5 & 2.8 & 1 \end{vmatrix} = -18.74 \neq 0,
$$

la matrice ha rango massimo, cioè 3. Allora il sistema ammetterà $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni.

La matrice completa del sistema sarà:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3.78 & 5 & 1 & 6 \\ 3 & 3.4 & 2 & 4 & 2.15 \\ 5 & 2.8 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}
$$

Indicando con $x, \ y, \ z$ e t le componenti del vettore incognito, applichiamo il metodo di Gauss con Pivot parziale, considerando la variabile t come parametro:

$$
\begin{pmatrix} 5 & 2.8 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3.4 & 2 & 4 & 2.15 \\ 1 & 3.78 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2.8 & 1 & 3 & 5 \\ 0. & 1.72 & 1.4 & 2.2 & -0.85 \\ 0. & 3.22 & 4.8 & 0.4 & 5. \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2.8 & 1 & 3 & 5 \\ 0. & 3.22 & 4.8 & 0.4 & 5. \\ 0. & 1.72 & 1.4 & 2.2 & -0.85 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2.8 & 1 & 3 & 5 \\ 0. & 3.22 & 4.8 & 0.4 & 5. \\ 0. & 0. & -1.16398 & 1.98634 & -3.52081 \end{pmatrix}
$$

Si tratta di un sistema triangolare superiore e si risolve facilmente per sostituzione all'indietro, tenendo presente che la soluzione dipenderà dal parametro t:

$$-1.16398z + 1.98634t = -3.52081$$

$$z = \frac{-3.52081 - 1.98634t}{-1.16398} = 3.02481 + 1.70651t$$

$$3.22y + 4.8z + 0.4t = 5$$

$$y = \frac{5 - 4.8z - 0.4t}{3.22} = \frac{5 - 4.8(3.02481 + 1.70651t) - 0.4t}{3.22} = -2.95624 - 2.66809t$$

$$5x + 2.8y + z + 3t = 5$$
$$x = \frac{5 - 2.8y - z - 3t}{5} = 0.986286 - 0.407684t$$

Quindi la soluzione è: $\begin{pmatrix} 0.986286 - 0.407684\ t \\ -2.95624 - 2.66809\ t \\ 3.02481 + 1.70651\ t \\ t \end{pmatrix}$ La soluzione si puó scrivere anche come

$$\begin{pmatrix} 0.986286 \\ -2.95624 \\ 3.02481 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0.407684 \\ -2.66809 \\ +1.70651 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dove $\begin{pmatrix} 0.986286 \\ -2.95624 \\ 3.02481 \\ 0 \end{pmatrix}$ é una soluzione particolare del sistema e $t \cdot \begin{pmatrix} -0.407684 \\ -2.66809 \\ +1.70651 \\ 1 \end{pmatrix}$ é la soluzione del sistema omogeneo associato.

3. Calcolare con il Metodo di Cavalieri-Simpson

$$\int_2^4 2 - 3x^{1-x} dx$$

con almeno 5 decimali esatti.

Risoluzione

Gli estremi dell'intervallo di integrazione sono: $a = 2$, $b = 4$. Calcoliamo iterativamente l'integrale suddividendo l'intervallo in n sottointervalli, e stimando l'errore mediante estrapolazione:

$$n = 1$$
$$h = \frac{b-a}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f(a+h) + f(b)\right) = \\ &= \frac{2}{6}\left(f(2) + 4f(3) + f(4)\right) = \\ &= 3.03993 \end{aligned}$$

$$n = 2$$
$$h = \frac{b-a}{4} = 0.5$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(b-a)}{12}\left(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(b)\right) = \\ &= \frac{2}{12}\left(f(2) + 4f(2.5) + 2f(3) + 4f(3.5) + f(4)\right) = \\ &= 3.03784 \end{aligned}$$

Stimiamo l'errore su I_1:

$$\epsilon_1 = \frac{I_1 - I_0}{15} = -0.000139171$$

Solo tre decimali esatti. Continuiamo:

$$n = 3$$
$$h = \frac{b-a}{8} = 0.25$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{(b-a)}{24}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + 4f(a+5h) + \\ &\qquad +2f(a+6h) + 4f(a+7h) + f(b)) \\ &= \frac{2}{24}\left(f(2) + 4f(2.25) + 2f(2.5) + 4f(2.75) + 2f(3) + 4f(3.25) + 2f(3.5) + 4f(3.75) + f(4)\right) = \\ &= 3.03716 \end{aligned}$$

Stimiamo l'errore su I_2:

$$\epsilon_2 = \frac{I_2 - I_1}{15} = -0.0000454999$$

Solo quattro decimali esatti. Continuiamo:

$$n = 4$$
$$h = \frac{b-a}{16} = 0.125$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{(b-a)}{48}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + 4f(a+5h) + 2f(a+6h) + \\ &\qquad 4f(a+7h) + 2f(a+8h) + 4f(a+9h) + 2f(a+10h) + 4f(a+11h) + 2f(a+12h) + \\ &\qquad +4f(a+13h) + 2f(a+14h) + 4f(a+15h) + f(b)) = \\ &= \frac{2}{48}(f(2) + 4f(2.125) + 2f(2.25) + 4f(2.375) + 2f(2.5) + 4f(2.625) + 2f(2.75) + 4f(2.875) + 2f(3) + \\ &\qquad +4f(3.125) + 2f(3.25) + 4f(3.375) + 2f(3.5) + 4f(3.625) + 2f(3.75) + 4f(3.875) + f(4)) = \\ &= 3.03711 \end{aligned}$$

Stimiamo l'errore su I_3:

$$\epsilon_3 = \frac{I_3 - I_2}{15} = -0.336176 \cdot 10^{-5}$$

Quindi $I \approx 3.03711$ con 5 decimali esatti.

Facoltativo: Verificare se $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ è o no autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
In caso affermativo determinare il corrispondente autovalore.

Risoluzione

v è autovettore di A se e solo se $Av = \lambda v$ per un certo λ, che in tal caso è detto l'autovalore relativo a v.
Calcoliamo:

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che v non è autovettore di A, perché dovrebbe essere

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \\ -3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 7\lambda \end{pmatrix}.$$