

1 Esercizi relativi al Capitolo 1

1. (a) $x = 7$;
 (b) $(x)_4 = (32.1)_4 = (14.25)_{10}$;
 (c) $x = 5$;
 (d) $(200)_x = (18)_{10}$; $x = 3$; $y = (11330)_8 = (4824)_{10}$;
 (e) $x = 2882.125$; $y = 231002.02$;
 (f) $(x)_3 = (12122.\overline{1012})_3 = (152.4)_{10}$;
 (g) $(x)_5 = (10.\overline{41})_5 = (5.875)_{10}$;
 (h) $x = 63.632653.....$ Il numero è periodico in base 10, ma il periodo è molto lungo;
 (i) $x = 11101.1$;
 (j) $(x)_7 = (10.\overline{5214})_7 = (7.76)_{10}$;
 (k) $(x)_7 = (241.21)_7 = (319.3125)_{10}$;
 (l) $(x)_{16} = (2E0)_{16} = (1340)_8 = (736)_{10}$;
2. $a = (30)_{10}$; $b = (16)_{10}$; $a \star b = (480)_{10} = (122210)_3$;
3. $a = (47.5)_{10}$; $b = (2.3)_{10}$; $a \star b = (109.25)_{10} = (155.2)_8$;
4. $a = (210)_{10}$; $b = (125)_{10}$; $a/b = (1.68)_{10} = (1.32)_5$;
5. $a = (70)_{10}$; $a \star b = (1491)_{10} = (5D3)_{16}$;
6. $a = 0.3566 \cdot 10^5$, $b = 0.3163 \cdot 10^5$; cambiare l'ordine in cui é eseguita la somma non cambia il risultato;
7. (a) $\frac{1}{3}$;
 (b) $(\frac{9}{F})_{16} = (\frac{9}{15})_{10} = 0.6$;
 (c) $(\frac{AE-A}{F0})_{16} = (\frac{A4}{F0})_1 6 = (\frac{164}{240})_{10} = (\frac{41}{60})_{10}$;
 (d) $(\frac{24}{FF})_{16} = (\frac{36}{255})_{10} = (\frac{12}{85})_{10}$;
8. (a) $-0.7500153184 \times 16^3 = -0.3072062744 \times 10^4$;
 (b) $-0.2500000596 \times 16^{-14} = -0.3469447779 \times 10^{-17}$;
 (c) $-0.04711914063 \times 16^{52} = -0.193836901 \times 10^{62}$;
 (d) $+0.06420916319 \times 16^{31} = +0.1365577877 \times 10^{37}$;
 (e) $-0.5044962168 \times 16^{-31} = -0.2372129812 \times 10^{-37}$;
9. $(73.AE)_{16} = (115.68)_{10} = (1303.22320110132)_4 = (430.32)_5$.

2 Esercizi relativi al Capitolo 2

1. Sia $g_1(x) = -\log(2x)$, si ha : $|g'_1(0.35)| = | -1/0.35| = 2.85$ quindi il primo schema non converge. Sia $g_2(x) = 0.5e^{-x}$, $|g'_2(0.35)| = | -0.5e^{-0.35}| = 0.35$, quindi lo schema è convergente e si può assumere $m = 0.35$. Applicando quest'ultimo schema si ottiene la successione

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0.3523440449 & |x_1 - x_0| = 0.23 \cdot 10^{-2} & \epsilon_1 = \frac{m}{1-m} |x_1 - x_0| = 0.12 \cdot 10^{-2} \\ x_2 = 0.351519018 & |x_2 - x_1| = 0.82 \cdot 10^{-3} & \epsilon_2 = 0.19 \cdot 10^{-3} \\ x_3 = 0.3518092047 & |x_3 - x_2| = 0.29 \cdot 10^{-3} & \epsilon_3 = 0.16 \cdot 10^{-3} \\ x_4 = 0.3517071586 & |x_4 - x_3| = 0.10 \cdot 10^{-3} & \epsilon_4 = 0.55 \cdot 10^{-4} \\ x_5 = 0.3517430508 & |x_5 - x_4| = 0.29 \cdot 10^{-3} & \epsilon_5 = 0.36 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

Con il metodo di Newton-Raphson si ha

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \quad x_0 = 0.35$$

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0.3517363295, & \epsilon_1 < |x_1 - x_0| = 0.18 \cdot 10^{-2} \\ x_2 = 0.3517337113, & \epsilon_2 < |x_2 - x_1| = 0.26 \cdot 10^{-5} \\ x_3 = 0.3517337112 & \epsilon_3 < |x_3 - x_2| = 0.1 \cdot 10^{-9} \end{array}$$

2. Un confronto di grafici mostra che la radice sta nell'intervallo $(0, 1)$. Non si può usare lo schema a) per il quale $|g'(x)| > 1$ in un intorno della radice, mentre si possono usare gli schemi b) e c) per i quali si ha, rispettivamente, $m = 0.6$ ed $m = 0.2$. È dunque meglio usare lo schema c) che, a parità di ordine di convergenza ha la costante asintotica più piccola. La soluzione dell'equazione data , con cinque decimali esatti è $x^* = 0.567143$.
3. $x^* = 1.52138$ (con 5 decimali esatti).
 - 1) Punto fisso: $x_n = \sqrt{1 + 2/x}$;
 - 2) Newton-Rapson
4. A partire da $f(x)$ si possono ottenere, ad esempio, i seguenti schemi di punto fisso

$$x = g_1(x) = x^2 - 2 \quad x = g_2(x) = \sqrt{x + 2}$$

Per quanto riguarda il primo, dato che $g'_1(x) = 2x$ con $g'_1(-0.7) = -1.4$, esso non converge. Per il secondo si ha $g'_2(x) = 1/2\sqrt{x + 2}$, $g'_2(-0.7) = 0.44$; è quindi convergente e si può stimare $m = 0.44$. Dato che si tratta di una radice semplice il metodo di Newton Raphson è certamente convergente. Si ottengono le seguenti successioni

Punto fisso :	Newton-Raphson :
$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$	$x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - x_n - 2)/(2x_n - 1)$
$x_0 = -0.7$	$x_0 = -0.7$
$x_1 = -1.140175425$	$x_1 = -1.0375$
$x_2 = -0.9272619$	$x_2 = -1.000457317$
$x_3 = -1.03572812$	$x_3 = -1.00000007$
$x_4 = -0.9819734621$	$x_4 = -1.00000000$
$x_5 = -1.008973012$	

Osservare la convergenza piu' lenta del primo schema, che è lineare.

5. A partire da $f(x) = x^2 - x - 2$, il metodo di Newton Raphson fornisce lo schema $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - x_n - 2)/(2x_n - 1)$, $m = 0.28$.

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1.7 \\
 x_1 &= 2.0375 \\
 x_2 &= 2.000457317 \\
 x_3 &= 2.00000007 \\
 x_4 &= 1.979310345 \\
 x_5 &= 2.000000000
 \end{aligned}$$

Gia' alla terza iterazione Newton Raphson ci fornisce un risultato con quattro cifre decimali esatte: $\epsilon_3 = m/(1 - m)|x_3 - x_2| < 1.6 \cdot 10^{-8}$.

6. La radice cercata è lo zero della funzione $f(x) = e^{-2x} - 1 + x$. Lo schema di bisezione fornisce :

$$\begin{array}{ll}
 f(0.4) = -0.15 & f(0.8) = 1.9 \cdot 10^{-3} \\
 f(0.6) = -0.09 & x_1 = 0.6 \\
 f(0.7) = -0.05 & x_2 = 0.7 \\
 f(0.75) = -0.02 & x_3 = 0.75 \\
 f(0.775) = -0.012 & x_4 = 0.775 \\
 f(0.7875) = -0.55 \cdot 10^{-2} & x_5 = 0.7875 \\
 f(0.79285) = -0.23 \cdot 10^{-2} & x_6 = 0.79285 \\
 f(0.796425) = -0.22 \cdot 10^{-3} & x_7 = 0.796425 \\
 f(0.7982125) = 0.83 \cdot 10^{-3} & x_8 = 0.7982125
 \end{array}$$

Dato che $\epsilon_0 = (0.8 - 0.4)/2 = 0.2$ ed $\epsilon_n = \epsilon_0/2^n$ si puo' sapere in partenza che per $n = 9$ si avra' il risultato con tre cifre decimali esatte, come richiesto, ma questa formula vale per il caso peggiore e, in generale, si raggiunge un po' prima l'accuratezza richiesta, come in questo caso.

Lo schema della secante variabile

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)(x_n - x_{n-1})/(f(x_n) - f(x_{n-1}))$$

fornisce

$$x_0 = 0.4$$

$$x_1 = 0.8$$

$$x_2 = 0.7950277292$$

$$x_3 = 0.7968082433$$

$$x_4 = 0.7968121348$$

La convergenza è ovviamente più veloce, dato che il metodo della secante variabile ha convergenza superlineare.

7. a) La regione del piano che contiene tutte le radici di $P(x)$ è la corona circolare

$$0.415 \leq |z| \leq 2.2.$$

- b) Per la (8.6) la successione

$$p_0(x) = p(x)$$

$$p_1(x) = -p'(x) = -3x^2 - 1.42x - 1.2$$

$$p_2(x) = -x - 1.10081075$$

$$p_3(x) = 1$$

è una successione di Sturm per il polinomio $P(x)$.

- c) Tenendo presenti i risultati di a) valutiamo i cambiamenti di segno degli elementi della successione della successione di Sturm agli estremi degli intervalli $[-2.2, -0.415]$ e $[0.415, 2.2]$. (Si considerano anche $-\infty$, 0 e $+\infty$ per riscontro).

	$-\infty$	-2.2	-0.415	0	0.415	2.2	$+\infty$
$p_0(x)$	-	-	+	+	+	+	+
$p_1(x)$	-	-	-	-	-	-	-
$p_2(x)$	+	+	-	-	-	-	-
$p_3(x)$	+	+	+	+	+	+	+
w	1	1	2	2	2	2	2

Si ha dunque che $p(x)$ ha una sola radice reale nell'intervallo $[-2.2, -0.415]$.

- d) Per determinare la radice di $p(x)$ nell'intervallo $[-2.2, -0.415]$ si può, ad esempio, applicare il metodo di Newton-Raphson $x_{n+1} = x_n - p(x)/p'(x)$ a partire dal punto medio dell'intervallo si ottiene :

$$x_0 = -1.3075 \quad x_1 = -0.9187697352$$

$$x_2 = -0.742995407 \quad x_3 = -0.7108995628$$

$$x_4 = -0.7100007116 \quad x_5 = -0.7100000000$$

La radice reale di $p(x)$ è $x_1 = -0.71000000$; eseguendo la divisione di $p(x)$ per $(x + 0.71000000)$ si ottiene come quoziente $x^2 + 1.2$. Le due radici complesse coniugate sono $x_{2,3} = \pm 1.0954451i$.

8. $[1, 2]; x^* \simeq 1.6667 \pm 0.5 \cdot 10^{-4}$

9. Applichiamo la formula $\epsilon_{n+1} = m/(1-m)|x_{n+1} - x_n|$, con $m = 0.4$, che dà una maggiorazione dell'errore in funzione degli scarti fra due iterate successive. Nelle nostre ipotesi si ha $\epsilon_5 \leq 0.167 \cdot 10^{-3}$. Dato che in uno schema di punto fisso la convergenza è lineare con costante asintotica m , volendo avere $\epsilon_{n+1} < 0.5 \cdot 10^{-4}$ si deve determinare k tale che

$$\epsilon_{5+k} \leq m^k \epsilon_5 \leq 0.4^k \cdot 0.167 \cdot 10^{-3} \leq 0.5 \cdot 10^{-4}.$$

Cioè $0.4^k \geq 0.3$; $k \geq \log(0.3)/\log(0.4) \simeq 1.3$. $k = 2$ è il più piccolo k che va bene; con altre due iterazioni otterremo il risultato con quattro cifre decimali esatte, come desiderato.

10. $x^* = 0.583708$

11. $x^* = 0.3167508$

12. $x^* = 0.567143$

13. $x^* = 0.567143$

14. $x^* = 1.404415$

15. La massima accuratezza raggiungibile nel calcolo di x^* dipende dall'accuratezza con cui è possibile nel valutare la funzione $f(x)$ in un punto x' . Nell'esercizio 12) e 13) si è visto che $\tilde{x} = 0.5671432904 \pm 0.5 \cdot 10^{-10}$, $f(\tilde{x}) = -0.15 \cdot 10^{-10}$, si può supporre $\delta \simeq 0.5 \cdot 10^{-10}$, se la calcolatrice lavora con 10 decimali corretti. Inoltre che $f'(x) = 1 + e^{-x}$, quindi $f'(x^*) \simeq 1.567$ ed $M \simeq 1.5$. Si ha dunque $|\tilde{x} - x^*| = (0.15 \cdot 10^{-10} + 0.5 \cdot 10^{-10})/1.5 \leq 0.43 \cdot 10^{-10}$. Il rapporto $\epsilon_a = \delta/M$ è detto accuratezza raggiungibile; nel nostro caso si ha $\epsilon_a = \delta/M = 0.33 \cdot 10^{-10}$.

16. Le curve date si incontrano solo nel punto di coordinate $x^* = 1.302964$, $y^* = 0.2646417$.

17. Le curve date si intersecano in due punti di coordinate $x_1 = 1.241143$, $y_1 = 3.459565$ e $x_2 = -2.211438$, $y_2 = 0.1095430$.

18. $x^* = 0.5180$ con tre decimali esatti. Anche con gli altri metodi la convergenza è lenta, dato che $f'(x^*) \simeq 0.22$ nell'intorno di x^* .

19. $x^* = 0.4266$.

20. $x^* = 1.3476$.

21. $x^* = 0.00167$. La convergenza è lenta perchè si tratta di una radice doppia: la retta $y = 1 - x$ è tangente alla curva $y = e^{-x}$ nel punto $x = 0$.

22. Solo lo schema $x = \sqrt[3]{x+5}$ è convergente in un intorno del punto $x_0 = 1.9$. La radice è $x^* = 1.90416$.

23. $x^* = 0.583708$

24. Dato il polinomio $p(x) = x^4 - 2.5x^3 - 4x^2 + 8.5x - 3$

(a) La regione del piano contenente le radici di $P(x)$ è la corona circolare $0.26 \leq |x| \leq 9.5$

(b) Una successione di Sturm per il polinomio $p(x)$ è

$$p_0(x) = x^4 - 2.5x^3 - 4x^2 + 8.5x - 3$$

$$p_1(x) = -4x^3 + 7.5x^2 + 8x - 8.5$$

$$p_2(x) = x^2 - 1.616x + 0.513$$

$$p_3(x) = -x + 0.77$$

$$p_4(x) = -1$$

$p(x)$ ha: una radice reale nell'intervallo $[-9.5, -0.26]$ dato che $w(-9.5) = 0$, $w(-0.26) = 1$; tre radici reali nell'intervallo $[0.26, 9.5]$ dato che $w(0.26) = 1$, $w(9.5) = 4$.

(c) La radice negativa di $p(x)$ è $x^* = -2$.

25. $x^* = 2.14775$. Si può usare il metodo di Newton-Raphson oppure uno schema di punto fisso come $x_{k+1} = \sqrt{2x + e^{1-x}}$.

26. $x = 1$ è radice di ordine 6 di $p(x)$.

27. $x = 1.117323266$ è l'ascissa del punto di intersezione delle due curve, con 9 decimali esatti. La corrispondente ordinata è $y = 0.438090212$

28. Confrontando i grafici $y = x_2 - 2x$ ed $y = -e^{x-1}$ si vede subito che $x_1 = 1$ è una radice, infatti si ha $f(1) = 0$. L'altra radice è $x_2 = 0.285446$ (usa lo schema g_1).

3 Esercizi relativi al capitolo 3

1. a) $x = (-9.2333, 1.5833, 0.7833)^t$.

b)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.3 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 4.2 \end{pmatrix}$$

c)

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0.3 & 1 \end{pmatrix} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & -3.2381 \\ 0 & 0.2 & 0.5238 \\ 0 & 0 & 0.2381 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2.6190 & -1.5714 & -3.2381 \\ -0.2619 & 0.3571 & 0.5238 \\ -0.1190 & 0.0714 & 0.2381 \end{pmatrix}$$

2. $x = (-1.1136, 1.3955, 0.3818)^t$
3. $x = (9.7230, -9.2999, 6.6208, -7.8951, -4.3922)^t$.
4. $x = (2.0000, 0.1429, -0.8571)^t$
5. $x = (-1.7825, -0.3857, -0.5334, 0.2107)^t$
6. $x = (-0.7455, -0.2364, 1.0364, 1.3455)^t$
7. $x = (0.5025, 0.4975)^t$
8. $\det(A) = 10^{-4}$, $\det(A^{-1}) = 10^{-4}$, $k(A) = 4$ in norma spettrale.
9. $k(A) = 29.4275$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. $\det(A) = 10^{10}$, $\det(A^{-1}) = 10^{-10}$, $k(A) = 1$;
11. x_2 ha un residuo dell'ordine di 10^{-6} , mentre x_1 , che è più accurata, ha un residuo più grande. Questo è dovuto al cattivo condizionamento di A , $k(A) = 2.1932 \cdot 10^6$.
12. La soluzione più accurata è x_1 , anche se ha il residuo più grande. Come sopra questo è dovuto al fatto che A è mal condizionata, $k(A) = 1.0402 \cdot 10^4$.
15. $x = (-61.6667, 115.6667, 104.6667)^t$; $k(A) = 284.5573$ in norma spettrale, $k(A) = 357.6667$ in norma massima.
- 18.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 55/7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & -1/7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & -1/55 & 1/55 \\ 0 & 0 & 7/55 & -7/55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ -8/55 & 8/55 & -1/55 & 1/55 \\ 1/55 & -1/55 & 7/55 & -7/55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$k(A) = 10$ in norma infinito.

19.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2500 & -0.1250 & 0.0625 & -0.0312 & 0.0156 \\ 0 & 0.2500 & -0.1250 & 0.0625 & -0.0312 \\ 0 & 0 & 0.2500 & -0.1250 & 0.0625 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2500 & -0.1250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2500 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2500 & -0.5000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -0.1250 & 0.2500 & -0.5000 & 1.0000 & 0 \\ 0.0625 & -0.1250 & 0.2500 & -0.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333008 & -0.166016 & 0.0820313 & -0.0390625 & 0.015625 \\ -0.166016 & 0.332031 & -0.164063 & 0.078125 & -0.03125 \\ 0.0820313 & -0.164063 & 0.328125 & -0.15625 & 0.0625 \\ -0.0390625 & 0.078125 & -0.15625 & 0.3125 & -0.125 \\ 0.015625 & -0.03125 & 0.0625 & -0.125 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = 9, \|A^{-1}\|_{\infty} = 0.7930, k(A) = 7.1367.$$