Esercizi Svolti di Analisi Numerica

Gli esercizi che proponiamo qui di seguito si riferiscono ai contenuti del libro

A. M. Perdon, Elementi di Analisi Numerica, Pitagora Ed., 2003.

Essi sono divisi secondo i capitoli di tale libro ed intendono fornire agli studenti materiale per esercitarsi e verificare la propria preparazione, in aggiunta agli esercizi proposti dallo stesso testo (le cui correzioni sono disponibili su questo stesso sito).

Argomenti del Capitolo 1

Esercizio 1

Determinare la base x tale che:

$$\mathbf{(1308)_{10} = (354{,}6)_x \ (21)_3}$$

$(21)_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7_{10}$

$(354{,}6)_x = 3x^2 + 5x + 4 + 6x^{-1}$

$$\frac{1308}{7} = 186{,}\overline{857142}_1$$

Quindi

$$\begin{cases} 6x^{-1} = \overline{0.857142} \\ 3x^2 + 5x + 4 = 186 \end{cases}$$

$3x^2 + 5x - 182 = 0$

$$x = \frac{-5 \mp \sqrt{25 + 2184}}{6} = \frac{-5 \mp 47}{6} =$$

$$\frac{-52}{6}$$

$$\frac{42}{6} = 7$$

Dato che x deve essere un intero > 1 l'unica soluzione accettabile è x = 7

Verifichiamo che soddisfa anche la 1° equazione

$$\frac{6}{7} = \overline{0.857142}$$

Esercizio 2

Determinare la base x tale che:

$$\mathbf{X_7 = (12{,}34)_6 \ (0.72)_{10}}$$

La risoluzione dell'esercizio è immediata:

$$12.34_6 = 8 + \frac{3 \cdot 6 + 4}{36} = 8 + \frac{22}{36} = 8.6\overline{1}_{10}$$

$$0.72_{10} \cdot 8.6\bar{1}_{10} = 6.2_{10} = 6.1\overline{254}_7$$

Esercizio 3

Determinare la base x tale che:

$$\mathbf{X_{10} = (20{,}64)_{10} \ (0.2\overline{1})_{10}}$$

La risoluzione dell'esercizio è immediata:

$$20.64_7 = 14 + \frac{46}{49} = 14.93877551$$

$$0.\overline{21}_3 = \left(\frac{21}{22}\right)_3 = \left(\frac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 3 + 2}\right)_{10} = \left(\frac{7}{8}\right)_{10}$$

$$X_{10} = 13.07142857$$

Argomenti del Capitolo 2

Esercizio 1

Data l'equazione $-1-x^2+4\sqrt{x}=0$

a) Determinare quante radici ha l' equazione e gli intervalli nei quali esse sono contenute.

b) Stimare tutte le radici con 4 decimali esatti.

Dal grafico di f(x) si deduce che l' equazione ammette 2 radici α_1 e α_2 tali che

$$\alpha_1 \in [0, 0.1]$$
$$\alpha_2 \in [2.1, 2.3]$$

Considero l'intervallo $[0, 0.1]$

$$m \approx \left| \frac{f(x)\cdot f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \right|_{x_0=0.1} = 0.2284 \qquad \frac{m}{1-m} = 0.2961$$

$$x_0 = 0.1$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.05837 \qquad \varepsilon_1 \le \frac{m}{1-m}\Delta x = 0.1\cdot 10^{-1}$$
$$x_2 = 0.06290 \qquad \varepsilon_2 \le 0.1\cdot 10^{-2}$$
$$x_3 = 0.06299 \qquad \varepsilon_3 \le 0.2\cdot 10^{-4}$$

$$\alpha_1 = 0.0629$$

Considero l'intervallo $[2.1, 2.3]$

$$m \approx \left| \frac{f(x)\cdot f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \right|_{x_0=2.3} = 0.0475 \qquad \frac{m}{1-m} = 0.04988$$

$$x_0 = 2,3$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.23182 \qquad \varepsilon_1 \le \frac{m}{1-m}\Delta x = 0.34\cdot 10^{-2}$$
$$x_2 = 2.23012 \qquad \varepsilon_2 \le 0.84\cdot 10^{-4}$$
$$x_3 = 2.230119 \qquad \varepsilon_3 \le 0.53\cdot 10^{-7}$$

$$\alpha_2 = 2.2301$$

In realtà x_3 *ha 6 cifre dopo la virgola esatte per cui:* $\alpha_2 = 2.230199$

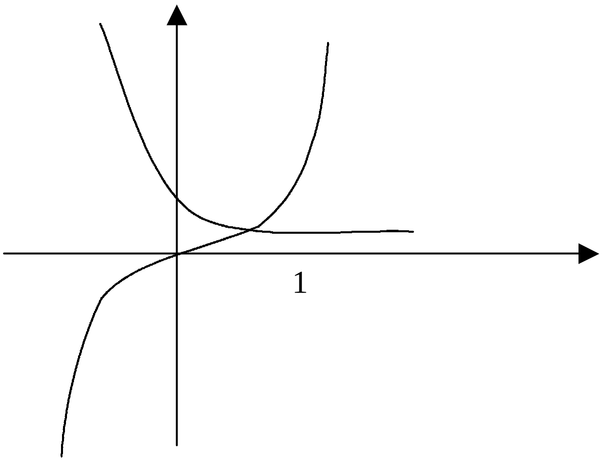
Esercizio 2

Determinare la radice dell'equazione $2x^3 - e^{-x^2} = 0$ **con 5 decimali esatti.**

Da un abbozzo del grafico si vede che
la radice sta nell'intervallo $[0.5, 1.5]$ infatti

f(0.5)>0

f(1.5)<0



Applichiamo il metodo di Newton-Raphson:

$f(x) = 2x^3 - e^{-x^2}$

$f'(x) = 6x^2 + 2xe^{-x^2}$

$f''(x) = 12x - 4x^2 e^{-x^2} + 2e^{-x^2}$

scegliamo come punto iniziale $x_0 = 1$ e vediamo che il metodo converge dato che:

$$m \approx \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f']^2} \right|_{x=x_0} = 0.4052109 < 1$$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$$

l'errore al passo i-esimo ε_i può essere maggiorato: $\varepsilon_i \le \frac{m}{1-m} \Delta x$

i	x_i	Δx_i	ε_i
0	1		
1	0.7576931	-0.2423069	0.1650759
2	0.6863195	-0.07137365	0.04862459
3	0.680291	-0.00602847	0.004107005
4	0.6802496	-0.000041467	0.00002824994
5	0.6802496	$-1.954047 \cdot 10^{-9}$	$1.33123 \cdot 10^{-9}$

La soluzione dell'equazione è: x=0.6802496 con 8 decimali esatti

Esercizio 3

Data l'equazione $-1-x^2+4\sqrt{x}=0$

c) Determinare quante radici ha l' equazione e gli intervalli nei quali esse sono contenute.

d) Stimare tutte le radici con 4 decimali esatti.

Dal grafico di f(x) si deduce che l' equazione ammette 2 radici α_1 e α_2 tali che

$$\alpha_1 \in [0, 0.1]$$
$$\alpha_2 \in [2.1, 2.3]$$

Considero l'intervallo $[0, 0.1]$

$$m \approx \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|_{x_0=0.1} = 0.2284 \qquad \frac{m}{1-m} = 0.2961$$

$$x_0 = 0.1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.05837 \qquad \varepsilon_1 \le \frac{m}{1-m} \Delta x = 0.1 \cdot 10^{-1}$$

$$x_2 = 0.06290 \qquad \varepsilon_2 \le 0.1 \cdot 10^{-2}$$

$$x_3 = 0.06299 \qquad \varepsilon_3 \le 0.2 \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha_1 = 0.0629$$

Considero l'intervallo $[2.1, 2.3]$

$$m \approx \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|_{x_0=2.3} = 0.0475 \qquad \frac{m}{1-m} = 0.04988$$

$$x_0 = 2,3$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.23182 \qquad \varepsilon_1 \le \frac{m}{1-m} \Delta x = 0.34 \cdot 10^{-2}$$

$$x_2 = 2.23012 \qquad \varepsilon_2 \le 0.84 \cdot 10^{-4}$$

$$x_3 = 2.230119 \qquad \varepsilon_3 \le 0.53 \cdot 10^{-7}$$

$$\alpha_2 = 2.2301$$

In realtà x_3 ha 6 cifre dopo la virgola esatte per cui: $\alpha_2 = 2.230199$

Argomenti del Capitolo 3

Esercizio 1

Dati:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare i fattori triangolari L ed U tali che A = LU (oppure le matrici L ed U e la matrice di permutazione P tali che PA = LU)
(b) Usando la decomposizione triangolare risolvere il sistema Ax = b

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & n_{23} & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} & n_{34} \\ 0 & 0 & 0 & n_{44} \end{pmatrix}$$

N.B: $\begin{cases} l_{31} = l_{41} = l_{42} = 0 \\ n_{31} = n_{14} = n_{24} = 0 \end{cases}$ perché la matrice è a banda

Moltiplicando la I° riga per la I° e II° colonna si ottengono rispettivamente le condizioni:

$\begin{cases} n_{11} = 8 \\ n_{12} = 1 \end{cases}$

Analogamente

$l_{21} = 0.125$

e quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & n_{23} & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} & n_{34} \\ 0 & 0 & 0 & n_{44} \end{pmatrix}$$

Proseguendo

$\begin{cases} 0.125 + n_{22} = 9 \\ n_{23} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} n_{22} = 8.875 \\ n_{23} = 2 \end{cases}$

$l_{32} \cdot 8.875 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad l_{32} \simeq 0.2254$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2254 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8.875 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} & n_{34} \\ 0 & 0 & 0 & n_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 \times 0.2254 + n_{33} = 3 \\ n_{34} = 4 \end{cases} \qquad \{ n_{33} \simeq 2.5493$$

$$l_{43} \cdot 2.5493 = 4 \quad \Rightarrow \quad l_{43} \simeq 1.5691$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2254 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5691 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8.875 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5493 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & n_{44} \end{pmatrix}$$

$$\{ 4 \times 1.5691 + n_{44} = 5 \qquad \{ n_{44} \simeq -1.27623$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2254 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5691 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8.875 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5493 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1.27623 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b \Rightarrow y = \begin{vmatrix} 2 \\ 0.25 \\ 0.9436 \\ 8.5193 \end{vmatrix}$$

$$Ux = y \Rightarrow x = \begin{vmatrix} 0.5519 \\ -2.4156 \\ 10.8442 \\ -6.6754 \end{vmatrix}$$

N.B: Dato che la matrice A è triangolare, si poteva applicare semplicemente l'algoritmo di Thomas

Esercizio 2

Dati:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 & 1.2 \\ 0.5 & -0.3 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0.3 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Determinare i fattori triangolari L ed U tali che A = LU

(d) **Usando la decomposizione triangolare risolvere il sistema Ax = b**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 & 1.2 \\ 0.5 & -0.3 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0.3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = 0.5 \\ u_{13} = 0.3 \\ u_{14} = 1.2 \\ \\ l_{21}u_{11} = 0.5 \rightarrow l_{21} = 0.5 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} = -0.3 \rightarrow u_{22} = 0.55 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = 0.25 \rightarrow u_{23} = 0.1 \\ l_{21}u_{14} + u_{24} = 0 \rightarrow u_{24} = -0.6 \\ \\ l_{32}u_{22} = 0.5 \rightarrow l_{32} = -0.\overline{90} \\ l_{32}u_{23} + u_{33} = 1 \rightarrow u_{33} = 1.0\overline{90} \\ l_{32}u_{24} + u_{34} = 0 \rightarrow u_{34} = 3.\overline{45} \\ \\ l_{43}u_{33} = 0.3 \rightarrow l_{43} = 0.275 \\ l_{43}u_{34} + u_{44} = 5 \rightarrow u_{44} = 4.05 \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.\overline{90} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.275 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 & 1.2 \\ 0 & -0.55 & 0.1 & -0.6 \\ 0 & 0 & 1.0\overline{90} & 3.\overline{45} \\ 0 & 0 & 0 & 4.05 \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora l'equazione Ax=b considerando che: $A = LU \rightarrow Ax = LUx = L(Ux) = b$
Pongo Ux=y e risolviamo in due passi

1) Ly=b

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.\overline{90} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.275 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{da cui quindi} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 1.5455 \\ -1.42501 \end{bmatrix}$$

2) Ux=y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 & 1.2 \\ 0 & -0.55 & 0.1 & -0.6 \\ 0 & 0 & 1.0\overline{90} & 3.\overline{45} \\ 0 & 0 & 0 & 4.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 1.5455 \\ -1.42501 \end{bmatrix} \quad \text{da cui quindi} \quad x = \begin{bmatrix} -0.213607 \\ 1.7531 \\ 2.53094 \\ -0.351855 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Dati:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 12 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.2 \\ 4.3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(e) Determinare i fattori triangolari L ed U tali che A = LU
(f) Usando la decomposizione triangolare risolvere il sistema Ax = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

L'equazione Ax=b può essere scritta come: $Ax = LUx = L(Ux) = b$;
ponendo Ux=y essa si può risolvere in due passi:

3) Ly=b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.2 \\ 4.3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{da cui quindi} \qquad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2.2 \\ -3.3 \\ -9.8 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Dati:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & -15 & 0 \\ 0 & 20 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & -12 & -11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 2 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

(g) Determinare i fattori triangolari L ed U tali che A = LU
(h) Usando la decomposizione triangolare risolvere il sistema Ax = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & -15 & 0 \\ 0 & 20 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & -12 & -11 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

L'equazione Ax=b può essere scritta come: $Ax = LUx = L(Ux) = b$;
ponendo Ux=y essa si può risolvere in due passi:

4) Ly=b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 2 \\ 0.6 \end{bmatrix} \qquad \text{da cui quindi} \qquad y = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1.25 \\ -3 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

5) Ux=y

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1.25 \\ -3 \\ 0.6 \end{bmatrix} \qquad \text{da cui quindi} \qquad x = \begin{bmatrix} -2.2 \\ 1.21 \\ 1.6 \\ -1.8 \end{bmatrix}$$

6) Ux=y

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2.2 \\ -3.3 \\ -9.8 \end{bmatrix} \qquad \text{da cui quindi} \qquad x = \begin{bmatrix} 4.95 \\ 5.95 \\ -3.23 \\ -1.63 \end{bmatrix}$$

Argomenti del Capitolo 4

Delle matrici che seguono

a) Calcolare gli autovalori ed i corrispondenti autovettori.
b) Determinare l’indice di condizionamento $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$ e confrontarlo con k(A) stimato in norma infinito ed in norma euclidea.

Esercizio 1

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0.5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} 0.99284985 & -0.07515313 & -0.49714574 \\ -0.10991217 & 0.87280092 & -0.86645301 \\ -0.04656707 & -0.4822557 & 0.0458834 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{0.33957102 \quad ; \quad 11.077918 \quad ; \quad 5.5825098\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{11.077918}{0.33957102} = 32.623273$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 1.25 & 3 & 12.5 \\ 3 & 34 & -34 \\ 12.5 & -34 & 291 \end{pmatrix}} = \sqrt{295.91151} = 17.202079$$

$\|A^{-1}\|_2 = 4.50822313....$

$K(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 77.5509495$

Esercizio 2

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 8 \\ -1 & 3 & -11 \\ 4 & -14 & 61 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} -0.9947464 & -0.12887338 & -0.54704619 \\ -0.09338827 & 0.17780577 & 0.80675706 \\ 0.04193117 & -0.97559047 & 0.22334615 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{-2.7127469 \quad ; \quad 64.079955 \quad ; \quad 0.63279234\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{64.079955}{0.63279234} = 101.26538$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 21 & -51 & 239 \\ -51 & 221 & -919 \\ 239 & -919 & 3906 \end{pmatrix}} = \sqrt{4136.9757} = 64.319326$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = 1.9173356$$

$$K(A) = \left\|A\right\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = 123.3217339$$

Esercizio 3

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} 0.28867513 & -0.28867513 & -0.57735027 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 7.9252251 \cdot e^{-14} & 0.5 & -0.5 \\ 0.57735027 & -0.57735027 & 0.57735027 & -4.97 \cdot e^{-14} & 3.03 \cdot e^{-14} \\ 0.5 & 0.5 & -1.5433193 \cdot e^{-14} & -0.5 & 0.5 \\ 0.28867513 & -0.28867513 & -0.57735027 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{5.7320508 \quad ; \quad -2.2679492 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 3\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{5.7320508}{2.2679492} = 2.5274159$

$$\left\|A\right\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 17 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 18 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 18 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 18 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 17 \end{pmatrix}} = \sqrt{32.856406} = 5.7320508$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = 0.4409269851$$

$$K(A) = \left\|A\right\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = 2.52741588$$

Esercizio 4

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} 0.96600149 & -0.85182401 & 0.178596 \\ -0.08322944 & -0.12951727 & -0.97379316 \\ -0.24477334 & 0.50756392 & -0.1408203 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{4.6064877 \quad ; \quad -0.42308529 \quad ; \quad -7.1834024\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{7.1834024}{0.42308529} = 16.978615$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 11 & -5 & 19 \\ -5 & 51 & 5 \\ 19 & 5 & 37 \end{pmatrix}} = \sqrt{52.65787} = 7.2565743$$

Esercizio 5

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} -0.37174803 & 0.37174803 & 0.60150096 & -0.60150096 \\ 0.60150096 & 0.60150096 & -0.37174803 & -0.37174803 \\ -0.60150096 & 0.60150096 & -0.37174803 & 0.37174803 \\ 0.37174803 & 0.37174803 & 0.60150096 & 0.60150096 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{4.618034 \quad ; \quad 1.381966 \quad ; \quad 3.618034 \quad ; \quad 2.381966\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{4.618034}{1.381966} = 3.3416408$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \\ 1 & -6 & 11 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & 10 \end{pmatrix}} = \sqrt{21.326238} = 4.618034$$

$$\|A^{-1}\|_2 = 0.7236068$$

$$K(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 3.3416379$$

Esercizio 6

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 0.005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} 0.52658235 & -0.85012413 \\ 0.85012413 & 0.52658235 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{1.6194182 \quad ; \quad -0.61441819\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{1.6194182}{0.61441819} = 2.6356938$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 1.000025 & 1.005 \\ 1.005 & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2.6225153} = 1.6194182$$

$$\|A^{-1}\|_2 = 2.64899384$$

$$K(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 4.289828836$$

Esercizio 7

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} 0.7070891 & -0.70712446 \\ 0.70712446 & 0.7070891 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{2.00005 \quad ; \quad 0.00005\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{2.00005}{0.00005} = 40001$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 2 & 2.0001 \\ 2.0001 & 2.0002 \end{pmatrix}} = \sqrt{4.0002} = 2.00005$$

$$\|A^{-1}\|_2 = 20000.5000125$$

$$K(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 40002.00005$$

Esercizio 8

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1\cdot e^{-15} & 1\cdot e^{-15} & 1\cdot e^{-15} & 1\cdot e^{-15} \\ 0 & 0 & 1\cdot e^{-30} & 1\cdot e^{-30} & 1\cdot e^{-30} \\ 0 & 0 & 0 & 1\cdot e^{-45} & 1\cdot e^{-45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\cdot e^{-60} \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{1 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 1\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}} = \sqrt{7.4874999} = 2.7363296$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = 10.75438416$$

$$K(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = 29.4275397$$

Esercizio 9

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 10^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^2 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{100 \quad ; \quad 100 \quad ; \quad 100 \quad ; \quad 100 \quad ; \quad 100\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{100}{100} = 1$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \end{pmatrix}} = \sqrt{10000} = 100$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = 0.01$$

$$K(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = 1$$

Esercizio 10

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} 0.64955573 & -0.58526314 \\ 0.76031399 & 0.81084342 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{1.4389993 \quad ; \quad 0.00000069\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{1.4389993}{0.00000069} = 2085506$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 1.441969 & 1.040807 \\ 1.040807 & 0.75125 \end{pmatrix}} = \sqrt{2.193219} = 1.4809521$$

$$\|A^{-1}\|_2 = 1480952.03419$$

$$K(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 2193219.02504$$

Esercizio 11

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$

a) Autovettori: $\begin{pmatrix} 0.9853762 & -0.99513333 \\ 0.99513333 & 0.09853762 \end{pmatrix}$

Autovalori: $\{101.9902 \quad ; \quad 0.00980486\}$

b) $P = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \dfrac{101.9902}{0.00980486} = 10402.005$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{\max}\begin{pmatrix} 101 & 1020 \\ 1020 & 10301 \end{pmatrix}} = \sqrt{10402} = 101.9901956$$

$$\|A^{-1}\|_2 = 101.9901951$$

$$K(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 10401.99990386$$

Argomenti del Capitolo 5

Esercizio 1

Determinare il polinomio di Newton che meglio interpola i seguenti dati:

x	**0.6**	**0.8**	**1**	**1.2**	**1.4**
y	**2.2**	**2.52**	**1.13**	**1.03**	**1.5**

Stimare f'(1) con la massima accuratezza possibile.

Per determinare il polinomio di Newton dobbiamo creare la tabella delle differenze divise:

$x_0 \quad f(x_0)$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$x_1 \quad f(x_1)$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$$

$x_2 \quad f(x_3)$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}$$

$$f[x_4, ..., x_0]$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$f[x_4, x_3, x_2, x_1]$$

$x_3 \quad f(x_4)$

$$f[x_4, x_3, x_2] = \frac{f[x_4, x_3] - f[x_3, x_2]}{x_4 - x_2}$$

$$f[x_4, x_3] = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

$x_4 \quad f(x_5)$

Con i valori:

$$
\begin{array}{llllll}
0.6 & 2.2 & & & & \\
 & & 1.6 & & & \\
0.8 & 2.52 & & -21.375 & & \\
 & & -6.95 & & 62.5 & \\
1.0 & 1.13 & & 16.125 & & -96.875 \\
 & & -0.5 & & -15 & \\
1.2 & 1.03 & & 7.125 & & \\
 & & 2.35 & & & \\
1.4 & 1.5 & & & &
\end{array}
$$

Ora possiamo impostare il polinomio di Newton.

$$
\begin{aligned}
P_N(x) &= 2.2+1.6(x-0.6)-21.375(x-0.8)\cdot(x-0.6)+ \\
&\quad +62.5(x-1)\cdot(x-0.8)\cdot(x-0.6)-96.875(x-1.2)\cdot(x-1)\cdot(x-0.8)\cdot(x-0.6)
\end{aligned}
$$

Applicando l'estrapolazione di Richardson alla formula della derivazione basata sulle differenze centrali calcoliamo il valore di f'(1) (usando i valori di f dati)

$$h = 0.2 \qquad x_0 = 1$$

$$F[h] = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{1.03-2.52}{0.4} = -3.725$$

$$F[2h] = \frac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{4h} = \frac{1.5-2.2}{0.8} = -0.875$$

$$\varepsilon = \frac{F(2h)-F(h)}{3} = 0.95$$

$$f'(1.4) = F[h]-\varepsilon = -4.675$$

Argomenti del Capitolo 6

Esercizio 1

Calcolare il seguente integrale con 3 decimali esatti:

$$\int_1^2 (2x^2-1)sen^2(x)dx$$

La funzione integranda è: $f(x) = (2x^2-1)sen^2(x)dx$

Utilizziamo il metodo di Romberg:

Applichiamo il metodo dei trapezi più volte con un numero di punti $n = 2^m$ dove $m = 0,1,2,3$ trovando ogni volta il valore A_m :

$$A_0 = \frac{f(2) + f(1)}{2} = 3.24791$$

$$A_2 = \frac{f(2) + 2f(1.5) + f(1)}{4} = 3.3652$$

$$A_2 = \frac{f(2) + 2f(1.75) + 2f(1.5) + 2f(1.25) + f(1)}{8} = 3.40157$$

Stimiamo l'errore:

$$\frac{\Delta_{11}}{3} = \frac{A_1 - A_0}{3} = 0.0390956 \simeq 0.4 \cdot 10^{-1}$$

$$\frac{\Delta_{12}}{3} = \frac{A_2 - A_1}{3} = 0.0121238 \simeq 0.1 \cdot 10^{-1}$$

continuiamo con la costruzione della tabella:

$$B_1 = A_1 + \frac{A_1 - A_0}{3} = 3.4043$$

$$B_2 = A_2 + \frac{A_2 - A_1}{3} = 3.4137$$

$$\frac{\Delta_{21}}{15} = \frac{B_2 - B_1}{15} = 0.000626634 \simeq 0.6 \cdot 10^{-3}$$

in conclusione.

$$C_2 = B_2 + \frac{B_2 - B_1}{15} = 3.41432$$

La tabella sarà:

A_m	$\frac{\Delta_{1i}}{3}$	B_m	$\frac{\Delta_{2i}}{15}$	C_m	$\frac{\Delta_{3i}}{63}$	D_m
3.24791						
3.3652	0.0390956	3.4043				
3.40157	0.0121238	3.4137	0.000626634	3.41432		

quindi $\int_1^2 (2x^2 - 1) sen^2(x) dx \cong 3.41432$

con un errore inferiore a $\frac{\Delta_{2i}}{15} = 0.6 \cdot 10^{-3}$

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale con 4 decimali esatti:

$$\int_1^2 (1-e^{-2x})dx$$

La funzione integranda è: $f(x) = (1-e^{-2x})dx$
Utilizziamo il metodo di Romberg:
Applichiamo il metodo dei trapezi più volte con un numero di punti $n = 2^m$ dove $m = 0,1,2,3$ trovando ogni volta il valore A_m :

$$A_0 = \frac{2}{2}\cdot\left[0+1-e^{-4}\right] = 0.9816842611$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[1-e^{-4}\right] + \frac{2}{2}\left[1-e^{-2}\right] = 1.355506897$$

$$A_2 = 1.468920194$$

$$A_3 = 1.498974297$$

La tabella sarà:

$\frac{\Delta_{1i}}{3}$	B_m	$\frac{\Delta_{2i}}{15}$	C_m	$\frac{\Delta_{3i}}{63}$	D_m
0.1246...	1.480114409				
0.6378...	1.5067224626	$0.177\cdot10^{-2}$	1.50849864		
0.0100...	1.508992331	$0.15\cdot10^{-3}$	1.509143511	$0.10\cdot10^{-4}$	

quindi l'integrale richiesto è: 1.509153747 , a meno di un errore $\varepsilon \le 0.1\cdot10^{-4}$

Argomenti del Capitolo 7

Esercizio 1

Data l'equazione differenziale:

$$\mathbf{y^{(3)} + y^{(2)} - y = 6}$$

con condizioni iniziali y(0) = 1 , y'(0) = 1 ed y'' (0) = 2, determinare con il metodo di Crank-Nicholson ed h = 0.3 la soluzione per x = 0.6

Posto:

$$z_1 := y(x)$$

$$z_2 := y'(x)$$

$$z_3 := y''(x)$$

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = z_3 \\ z'_3 = -z_3 + z_1 + 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = 1 \\ z_3(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} z_1^I \\ z_2^I \\ z_3^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ponendo ora $Z = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{bmatrix}$ si ha: $Z' = AZ + b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Applicando lo schema di Crank-Nicholson, partendo con $Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, si ha:

$Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{2} [A Z_{n+1} + b + A Z_n + b]$

$Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{2} A Z_{n+1} + \frac{h}{2} A Z_n + bh$

$Z_{n+1} (I - \frac{h}{2} A) = (I + \frac{h}{2} A) Z_n + bh$

$Z_{n+1} = (I - \frac{h}{2} A)^{-1} (I + \frac{h}{2} A) Z_n + (I - \frac{h}{2} A)^{-1} bh$

$$E := (I - \frac{h}{2} A)^{-1} (I + \frac{h}{2} A) = \begin{pmatrix} 1.006 & 0.3009 & 0.0392 \\ 0.0392 & 1.006 & 0.2616 \\ 0.2616 & 0.0392 & 0.7442 \end{pmatrix}$$

$$q := (I - \frac{h}{2} A)^{-1} bh = \begin{pmatrix} 0.0353 \\ 0.2355 \\ 1.57 \end{pmatrix}$$

$Z_{n+1} = E Z_n + q$ con $x_0 = 0$ $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$h = 0.3$ $x_1 = 0.3$ $x_2 = 0.6$

$Z_{n+1} = E Z_n + q$

$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Z_1 = E\, Z_0 + q$ $\qquad Z_1 = \begin{pmatrix} 1.421 \\ 1.804 \\ 3.359 \end{pmatrix}$ $\qquad y(0.3) = 1.42058214325$

$Z_2 = E\, Z_1 + q$ $\qquad Z_2 = \begin{pmatrix} 2.1388570739 \\ 2.98461947267 \\ 4.512383375142 \end{pmatrix}$ $\qquad y(0.6) = 2.13885720739$

Data l'equazione differenziale:

$$\mathbf{2y^{(3)} + 5y^{(1)} - y = 0}$$

con condizioni iniziali y(1) = 0 , y'(1) = -1 ed y'' (1) = 0, determinare con il metodo di Eulero esplicito ed h = 0.2 la soluzione per x = 1.4

Posto:

$z_1 := y(x)$

$z_2 := y'(x)$

$z_3 := y''(x)$

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = z_3 \\ z'_3 = -\frac{5}{2} z_2 + \frac{1}{2} z_1 \end{cases} \qquad Z_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posto $Z = (z_1, z_2, z_3)^T$

$$Z'_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} Z$$

Sapendo che: $Z_{n+1} = [I + 0.2 \cdot A] Z_n$

Posso calcolare:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.9 \\ 1.02 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Data l'equazione differenziale:

$$\mathbf{4y^{(3)} - 3y^{(2)} - y = 0}$$

con condizioni iniziali y(1) = 0 , y'(1) = -1 ed y'' (1) = 0, determinare con il metodo di Eulero esplicito ed h = 0.1 la soluzione per x = 0.2

Posto:

$z_1 := y(x)$

$z_2 := y'(x)$

$z_3 := y''(x)$

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = z_3 \\ z'_3 = \frac{3}{4} z_3 + \frac{1}{4} z_1 \end{cases} \qquad Z_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z'_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} Z$$

Sapendo che: $Z_{n+1} = [I + 0.1 \cdot A] Z_n = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.1 \\ 0.025 & 0 & 1.075 \end{bmatrix} \cdot Z_n$

Posso calcolare:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -1 \\ -0.0025 \end{pmatrix}$$