Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. Logistica e Produzione
Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - Soluzione del Primo Parziale -TEMA A

(Prof. A.M.Perdon)

Fermo, 29 Maggio 2006

PARTE II.

1. Trovare la radice negativa dell'equazione $2x^2 - 4x - \sqrt{1+x^2} - 1 = 0$ con il metodo di Newton-Raphson con 4 decimali esatti.

   La funzione $f(x) = 2x^2 - 4x - \sqrt{1+x^2} - 1$ é continua con derivata continua $f'(x) = 4x - 4 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
   Dal grafico della funzione si evince che la radice negativa appartiene all'intervallo $[-1, 0]$ infatti $f(-1) * f(0) < 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{2{x_k}^2 - 4x_k - \sqrt{1+{x_k}^2} - 1}{4x_k - 4 - \frac{x_k}{\sqrt{1+{x_k}^2}}}.$$

   Prendiamo come punto iniziale: $x_0 = -0.5 \ \in [-1, 0]$. Essendo $m = |\frac{f(x)*f''(x)}{f'(x)^2}|_{x_0=-0.5} = 0.03847 < 1$ l'errore si pu stimare con $\epsilon_k \leq \frac{m}{1-m} \cdot |x_k - x_{k-1}| = 0.04|x_k - x_{k-1}|$

$x_0 =$	-0.5		
$x_1 =$	-0.978429997	$\epsilon_1 \leq$	0.059137
$x_2 =$	-0.503083027	$\epsilon_2 \leq$	0.019
$x_3 =$	-0.4313399	$\epsilon_3 \leq$	0.00287
$x_4 =$	-0.4297624	$\epsilon_2 \leq$	0.00006
$x_5 =$	-0.42976169	$\epsilon_5 \leq$	$0.3 \cdot 10^{-7}$

   Un'approssimazione della radice $\in [-1, 0]$ di $f(x)$ con 7 decimali esatti è $x = -0.4297616$.

2. Determinare l' inversa della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 5.21 & 0 & 0 \\ 7.52 & 2 & 0 \\ 0.5 & 4.32 & 9.1 \end{pmatrix}$$

   Scrivere tutti i passaggi. La matrice A é triangolare bassa dobbiamo calcolare la matrice A^{-1} tale che

$$A * A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 5.21 & 0 & 0 \\ 7.52 & 2 & 0 \\ 0.5 & 4.32 & 9.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5.21x_1 &= 1 \\ 7.52x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0.56x_1 + 4.32x_2 + 9.1x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_3 &= 1 \\ 4.32x_3 + 9.1x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$9.1x_6 = 1$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.1919 \\
x_2 &= -0.721689 \\
x_4 &= 0.33205796 \\
x_5 &= -0.23736 \\
x_3 &= 0.5 \\
x_6 &= 0.10989
\end{aligned}
$$

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1919 & 0 & 0 \\ -0.7217 & 0.5 & 0 \\ 0.3321 & -0.2374 & 0.1099 \end{pmatrix}
$$

3. Risolvere il sistema $A\bar{x} = b$, con

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 4.38 & 4 & 1 \\ 3 & 3.62 & 2 & 1 \\ 6 & 2.81 & 1 & 3.61 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.71 \\ 5 \end{pmatrix}.
$$

Scrivere tutti i passaggi.

Il sistema è sottodeterminato.

La matrice completa del sistema sarà:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 4.38 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 3.62 & 2 & 1 & 2.71 \\ 6 & 2.81 & 1 & 3.61 & 5 \end{pmatrix}
$$

Indicando con $x,\ y,\ z$ e t le componenti del vettore incognito, applichiamo il metodo di Gauss con Pivot parziale, considerando la variabile t come parametro.

$$
\begin{pmatrix} 6 & 2.81 & 1 & 3.61 & 5 \\ 0 & 3.443 & 3.667 & -0.203 & 4.333 \\ 0 & 0 & -0.859 & -0.674 & -2.578 \end{pmatrix}
$$

Si tratta di un sistema triangolare superiore e si risolve facilmente per sostituzione all'indietro, tenendo presente che la soluzione dipenderà dal parametro t.

Quindi la soluzione è: $\begin{pmatrix} 1.241 - 0.89\ t \\ 0.895\ t - 1.938 \\ 3.001 - 0.785\ t \\ t \end{pmatrix}$.

Facoltativo: Determinare $a + b$ eseguendo la somma in base 10 con mantissa normalizzata di 4 cifre con

$$a = 1.73214$$

$$b = 25.0130132$$

.

$$a + b = 0.2674 \cdot 10^2$$

Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. Logistica e Produzione
Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - Soluzione Primo Parziale - TEMA B
(Prof. A.M.Perdon)

Fermo, 29 Maggio 2006

PARTE II.

1. Determinare la radice appartenente all'intervallo $[0, 1]$ dell'equazione

$$4\log(x+1) - x - 1 = 0,$$

con tre decimali esatti usando uno dei seguenti schemi di punto fisso:

$$\text{(a) } x_{n+1} = 4\log(x_n + 1) - 1 \quad \text{(b) } x_{n+1} = e^{\frac{x_n+1}{4}} - 1.$$

Prendiamo come punto iniziale $x_0 = 0.5$
$g_1'(x_0) = |e^{\frac{x_0+1}{4}} * \frac{1}{4}| = 0.3637 < 1$ lo schema é quindi convergente mentre $g_2'(x_0) = |\frac{4}{x_0+1}| = 2.67 > 1$ tale schema non converge. Lo schema convergente é

$$x_{n+1} = e^{\frac{x_n+1}{4}} - 1$$

l'errore si puo' stimare con la formula $\epsilon_n \leq \frac{m}{1-m} \cdot |x_k - x_{k-1}| = 0.572|x_n - x_{n-1}|$

$x_0 =$	0.5		
$x_1 =$	0.4549914	$\epsilon_1 \leq$	0.0257
$x_2 =$	0.4387114	$\epsilon_1 \leq$	0.0093
$x_3 =$	0.4328677	$\epsilon_2 \leq$	0.00334
$x_4 =$	0.43077597	$\epsilon_3 \leq$	0.001196
$x_5 =$	0.43002796	$\epsilon_4 \leq$	0.004

Un'approssimazione della radice $\in [-1, 0]$ di $f(x)$ con 3 decimali esatti è $x = 0.430$.

2. Risolvere con il metodo di Gauss con Pivot parziale il sistema $Ax = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0.05 & -0.08 & 4 \\ 7 & 0.24 & -0.06 \\ 0.35 & 4 & -0.15 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7.15 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Scrivere tutti i passaggi.

Scriviamo la matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0.05 & -0.08 & 4 & 5 \\ 7 & 0.24 & -0.06 & 7.15 \\ 0.35 & 4 & -0.15 & 0.5 \end{array}\right)$$

Scambiamo la prima e la seconda riga:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 7 & 0.24 & -0.06 & 7.15 \\ 0.05 & -0.08 & 4 & 5 \\ 0.35 & 4 & -0.15 & 0.5 \end{array}\right)$$

Ora annulliamo gli elementi della prima colonna sottostanti al "Pivot":

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 7 & 0.24 & -0.06 & 7.15 \\ 0.05 & -0.08 & 4 & 5 \\ 0.35 & 4 & -0.15 & 0.5 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{r} \\ R_2 - 0.07R_1 \\ R_3 - 0.05R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 7 & 0.24 & -0.06 & 7.15 \\ 0. & -0.817 & 4.0004 & 4.9489 \\ 0. & 3.988 & -0.147 & 0.1425 \end{array}\right)$$

Scambiamo la riga R_2 con la R_3 e annulliamo l'elemento della seconda colonna sottostante al "Pivot":

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 7 & 0.24 & -0.06 & 7.15 \\ 0. & -0.817 & 4.0004 & 4.9489 \\ 0. & 3.988 & -0.147 & 0.1425 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ R_3 + 0.205R_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 7 & 0.24 & -0.06 & 7.15 \\ 0. & 3.988 & -0.147 & 0.1425 \\ 0. & 0 & 3.997 & 4.9518 \end{array}\right)$$

Il sistema è ora triangolare alto e si risolve per sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned} 3.997x_3 &= 4.9518 \\ x_3 &= 1.238879 \\ \\ 3.988x_2 - 0.147x_3 &= 0.1425 \\ x_2 &= 0.081398 \\ \\ 7x_1 + 0.24x_2 - 0.06x_3 &= 7.15 \\ x_1 &= 1.0292567 \end{aligned}$$

Quindi la soluzione approssimata sarebbe $\overline{x} = \begin{pmatrix} 1.029 \\ 0.0814 \\ 1.239 \end{pmatrix}$.

3. Dato il polinomio $P(x) = x^4 + 4.85x^3 - 10.5x^2 - 11.15x - 15$, determinare:

   (a) la successione di Sturm per il polinomio $P(x)$.

   (b) quante sono le radici reali e il loro segno.

   La successione di Sturm per $P(x)$ è:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= x^4 + 4.85x^3 - 10.5x^2 - 11.15x - 15 \\ p_1(x) &= -4x^3 - 14.55x^2 + 21x + 11.15 \\ p_2(x) &= x^2 + 0.2067x + 1.2029 \\ p_3(x) &= -x - 0.965424 \\ p_4(x) &= -1 \end{aligned}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$p_0(x)$	$+$	$-$	$+$
$p_1(x)$	$+$	$+$	$-$
$p_2(x)$	$+$	$+$	$+$
$p_3(x)$	$+$	$-$	$-$
$p_4(x)$	$-$	$-$	$-$
	$w(-\infty) = 1$	$w(0) = 2$	$w(+\infty) = 3$

Quindi $P(x)$ ha una radice reale negativa, una reale positiva e due complesse coniugate.

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata la seguente uguaglianza

$$(24)_6 * (513)_6 = (x)_{10} = (y)_4$$

.

$$(24)_6 = (16)_{10}$$

$$(513)_6 = (189)_{10}$$

$$(x)_{10} = 3024$$

$$(y)_4 = (233100)_4$$

Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. Logistica e Produzione
Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - Soluzione del Primo Parziale - TEMA C
(Prof. A.M.Perdon)

Fermo, 29 Maggio 2006

PARTE II.

1. Dato il polinomio $P(x) = -2.21x^3 - 4.2x^2 + 7x - 3$

   (a) determinare λ e μ;

   (b) disegnare la regione che contiene tutte le radici di $P(x)$;

   (c) determinare quante sono le radici di $P(x)$ e i loro segni.

$$\lambda = 3.167$$
$$\mu = 2.333$$
$$0.3 \leq z \leq 4.167$$

La successione di Sturm per $P(x)$ è:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= -2.21x^3 - 4.2x^2 + 7x - 3 \\ p_1(x) &= 6.63x^2 + 8.4x - 7 \\ p_2(x) &= -x + 0.695316 \\ p_3(x) &= -1 \end{aligned}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$p_0(x)$	$+$	$-$	$-$
$p_1(x)$	$+$	$-$	$+$
$p_2(x)$	$+$	$+$	$-$
$p_3(x)$	$-$	$-$	$-$
	$w(-\infty) = 1$	$w(0) = 2$	$w(+\infty) = 2$

Quindi $P(x)$ ha una radice reale negativa e due radici complesse coniugate.

2. Risolvere il sistema $A\bar{x} = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Scrivere tutti i passaggi. Il sistema è sottodeterminato.

La matrice completa del sistema sarà:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4.38 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 3.62 & 2 & 1 & 2.71 \\ 6 & 2.81 & 1 & 3.61 & 5 \end{pmatrix}$$

Indicando con $x,\ y,\ z$ e t le componenti del vettore incognito, applichiamo il metodo di Gauss con Pivot parziale, considerando la variabile t come parametro.

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & -2.14286 & 6 & 2.1429 & 12.4286 \\ 0 & 0 & 0.2 & -2 & -4.8 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema triangolare superiore e si risolve facilmente per sostituzione all'indietro, tenendo presente che la soluzione dipenderà dal parametro t.

Quindi la soluzione è: $\begin{pmatrix} 54 - 21\ t \\ -73 - 29\ t \\ -24 + 10\ t \\ t \end{pmatrix}$.

3. Determinare con il metodo della secante variabile la radice dell'equazione

$$\log(x-6) + x = 8$$

con cinque decimali esatti. Dal grafico si evince che la radice dell'equazione appartiene all'intervallo $[7, 8]$

$$\begin{array}{llll}
x_0 = & 7 & & \\
x_1 = & 8 & & \\
x_2 = & 7.590616 & \epsilon_2 \leq & 0.409 \\
x_3 = & 7.555515 & \epsilon_3 \leq & 0.035 \\
x_4 = & 7.55715 & \epsilon_4 \leq & 0.001637 \\
x_5 = & 7.557145 & \epsilon_5 \leq & 0.6 \cdot 10^{-5} \\
x_6 = & 7.557145599 & \epsilon_6 \leq & 0.13 \cdot 10^{-8}
\end{array}$$

Facoltativo: Determinare la frazione generatrice in base 10 del seguente numero periodico

$$(4.26\overline{A})_{16}$$

.

$$x = \frac{580}{3840}$$

Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. Logistica e Produzione
Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - Soluzione Primo Parziale - TEMA D
(Prof. A.M.Perdon)

Fermo, 29 Maggio 2006

PARTE II.

1. Risolvere, utilizzando la decomposizione LU il sistema $A\bar{x} = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4.00 & 6.20 & -2.00 \\ 3.80 & 3.26 & -0.86 \\ 2.10 & 4.74 & -2.16 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 3.6 \\ -1.7 \end{pmatrix}.$$

Scrivere tutti i passaggi.

$$L = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0.95 & 1. & 0. \\ 0.525 & -0.5646 & 1. \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 6.2 & -2 \\ 0 & -2.63 & 1.04 \\ 0 & 0 & -0.5228 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risolviamo per sostituzione in avanti il sistema $Ly = b$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.95 & 1 & 0 \\ 0.525 & -0.5646 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 3.6 \\ -1.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 4.3 \\ 0.95y_1 + y_2 &= 3.6 \Rightarrow \ y_2 = -0.485 \\ 0.525y_1 - 0.564y_2 + y_3 &= -1.7 \Rightarrow \ y_3 = -4.23104 \end{aligned}$$

Ora risolviamo per sostituzione all'indietro il sistema $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6.2 & -2 \\ 0 & -2.63 & 1.04 \\ 0 & 0 & -0.5228 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.3 \\ -0.485 \\ -4.23104 \end{pmatrix}$$

la soluzione sarà:

$$\begin{aligned} -0.5228x_3 &= -4.23104 \\ x_3 &= \tfrac{-4.23104}{-0.5228} = 8.093 \\ \\ -2.63x_2 + 1.04x_3 &= -0.485 \\ x_2 = 3.3847 & \\ \\ 4x_1 + 6.2x_2 - 2x_3 &= 4.3 \\ x_1 &= -0.124785 \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è

$$x \simeq \begin{pmatrix} -0.124785 \\ 3.3847 \\ 8.093 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare la norma massima per righe della matrice A dell'esercizio precedente.
Stimare e calcolare l'indice di condizionamento di A nella stessa norma.

$$\|A\|_\infty = 12.2$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 5.0232744$$
$$k(A) = \|A\|_\infty * \|A^{-1}\|_\infty = 61.28395$$

3. Dato il polinomio $P(x) = x^3 + 2.55x^2 - 19.48x + 19.53$
   (a) determinare la regione del piano di Gauss contenente tutte le radici di $P(x)$ e gli intervalli reali in cui si trovano le radici
   (b) calcolare tutte le radici con almeno tre decimali esatti.

$$\lambda = 19.53$$
$$\mu = 0.997$$
$$0.5 \leq z \leq 20.53$$

Le radici di $P(x)$ sono $x_1 = 2.25$ $x_2 = 1.4$ e $x_3 = 6.2$

Facoltativo: Scrivere in base 10 il numero rappresentato in virgola mobile in base 16 su 32 bit, con mantissa normalizzata ed esponente ad eccesso 64_{10} dalle seguenti 8 cifre esadecimali

$$A4A4B6D8$$

.

$q^* = 228$ $x = -3.39912612127.10^{269}$