Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. Logistica e Produzione
Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA -TEMA A

(Prof. A.M.Perdon)

Fermo, 27 Settembre 2005

1. Scrivere la tabella delle differenze divise per il seguente insieme di dati:

x	2.6	2.8	3	3.2	3.64
$f(x)$	1.76	2.18	3.15	2.77	1.73

Stimare i valori di $f(x)$ nei punti $x = 2.9$ ed $x = 3.1$ usando un polinomio di Newton di grado tre.

Dai dati si ricava questa tabella delle differenze divise:

x	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+4}]$
2.6	1.76				
		2.1			
2.8	2.18		6.875		
		4.85		-39.583	
3	3.15		-16.875		67.4475
		-1.9		14.375	
3.2	2.77		-8.25		
		-5.2			
3.4	1.73				

da cui:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1.76 + 2.1(x-2.6) \\ P_2(x) &= 1.76 + 2.1(x-2.6) + 6.875(x-2.6)(x-2.8) \\ P_3(x) &= 1.76 + 2.1(x-2.6) + 6.875(x-2.6)(x-2.8) + \\ &\quad -39.583(x-2.6)(x-2.8)(x-3) \end{aligned}$$

Poiché ci viene chiesto di stimare $f(2.9)$ con un polinomio di grado 3, conviene usare $P_3(x)$: $P_3(2.9) = 2.715$.

Per stimare invece $f(3.1)$, utilizziamo il polinomio di grado 3 costruito a partire dai valori $2.8, 3, 3.2, 3.4$, rispetto al quale 3.3 risulta più centrale:

$$Q_3(x) = 2.18 + 4.85(x-2.8) - 16.875(x-2.8)(x-3) + 14.375(x-2.8)(x-3)(x-3.2)$$

$$\Longrightarrow Q_3(3.1) = 3.0856$$

2. Risolvere il sistema sovradeterminato $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3.43 & 4 \\ 3 & 3.7 & 5 \\ 5 & 3.8 & 2 \\ 7 & 2.76 & 1 \\ 8 & 0.83 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 7.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Qualora non ammetta soluzione esatta, calcolare la soluzione nel senso dei minimi quadrati usando la decomposizione QR. Scrivere tutti i passaggi della soluzione del sistema lineare.

$$Q = \begin{pmatrix} 0.0821995 & 0.6144101 & 0.3191459 \\ 0.2465984 & 0.5060743 & 0.39053909 \\ 0.4109975 & 0.3632444 & -0.38234999 \\ 0.5753965 & -0.0108994 & -0.5558266 \\ 0.6575959 & -0.4840699 & 0.53897163 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 12.165525 & 4.89005 & 6.247162 \\ 0. & 4.928370 & 3.283252 \\ 0. & 0. & 4.60361 \end{pmatrix},$$

risolviamo il sistema $Rx = Q^T b$:

$$\begin{pmatrix} 12.16553 & 4.89005 & 6.24716 \\ 0. & 4.92837 & 3.28325 \\ 0. & 0. & 4.60361 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.93225 \\ 5.42186 \\ 0.46586 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema triangolare superiore e si risolve facilmente per sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{0.46586}{4.60361} = 0.10119 \\ x_2 &= \frac{5.42186 - 3.28325x_3}{4.92837} = 1.03272 \\ x_1 &= \frac{7.93225 - 6.24716x_3 - 4.89005x_2}{12.16553} = 0.18495 \end{aligned}$$

Quindi

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} 0.18495 \\ 1.03272 \\ 0.10119 \end{pmatrix}$$

3. Calcolare con il Metodo di Romberg

$$\int_{-5}^{3} f(x)dx$$

dove la $f(x)$ è definita dalla tabella

x	-5	-3	-1	1	3
$f(x)$	5.54	5.42	5	4.16	4.88

Dare una stima dell'errore.

A_i	$\frac{\triangle A_i}{3}$	B_i	$\frac{\triangle B_i}{15}$	C_i
41.68				
40.84	-0.28	40.56		
39.58	-0.42	39.16	$-0.09\overline{3}$	$39.0\overline{6}$

Con il metodo di Romberg l'integrale richiesto vale $I \approx 39.0\overline{6}$ con <u>almeno</u> 1 decimale esatto.

Facoltativo: Determinare x ed y in modo che sia verificata l'uguaglianza:

$$(3456.78)_{12} = (x)_{10} = (y)_6$$

$$x = 3 * 12^3 + 4 * 12^2 + 5 * 12 + 6 * 12^0 + 7 * 12^{-1} + 8 * 12^{-2} = 5826.63\overline{8}$$

$5826 \div 6 = 971 \; r = 0$
$971 \div 6 = 161 \; r = 5$
$161 \div 6 = 26 \; r = 5$
$26 \div 6 = 4 \; r = 2$
$4 \div 6 = 0 \; r = 4$

La parte intera di $y = (42550)_6$
$0.63\overline{8} * 6 = 3.83$
$0.8\overline{3} * 6 = 5$

La parte frazionaria di $y = 0.35$
$y = 42550.35$.

Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. Logistica e Produzione
Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - TEMA B

(Prof. A.M.Perdon)

Fermo, 27 Settembre 2005

1. Trovare la radice dell'equazione $e^{x-0.5} = 4x - 3$ contenuta nell'intervallo $[2; 2.5]$ con 2 decimali esatti, utilizzando uno dei seguenti schemi di punto fisso:

$$a)\ y = \log(4x-3) + 0.5 \qquad\qquad b)\ y = \frac{e^{x-0.5}-3}{4}$$

$g_1'(x) = \frac{4}{4x-3}$ $\quad |g_1'(2.25)| = \frac{4}{4x-3} = 0.\overline{6}$
$g_2'(x) = \frac{e^{x-0.5}}{4}$ $\quad |g_2'(2.25)| = \frac{e^{x-0.5}}{4} = 1.43$
$m = 0.\overline{6}$ $\quad \frac{m}{1-m} = 2$

$$x_{n+1} = \log(4x_n - 3) + 0.5$$

$x_0 = 2.25$
$x_1 = 2.291759$
$x_2 = 2.319218$
$x_3 = 2.33687$
$x_4 = 2.348059$
$x_5 = 2.355084$
$x_6 = 2.3594705$
$x_7 = 2.362199 \quad \epsilon_7 \leq 0.5 * 10^{-2}$

2. Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2. & 0. & 0. \\ -0.8 & 0.2 & 0 \\ -2.74 & -0.4 & 0.525 \end{pmatrix}.$$

Scrivere tutti i passaggi.

$$A * A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.2 & 0 \\ -2.74 & -0.4 & 0.525 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 1 \\ -0.8x_1 + 0.2x_2 &= 0 \\ -2.74x_1 - 0.4x_2 + 0.525x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2} \\ x_2 &= 2 \\ x_4 &= 4.1\overline{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.2x_3 &= 1 \\ -0.4x_3 + 0.525x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \tfrac{1}{0.2} = 5 \\ x_5 &= 3.8095 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.525x_6 &= 1 \\ x_6 &= \tfrac{1}{0.525} = 1.90476 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4.1\overline{3} & 3.8095 & 1.90476 \end{pmatrix}$$

3. Calcolare con il Metodo di Cavalieri-Simpson il seguente integrale

$$\int_0^2 \frac{e^{x/2} - x^2 + 6}{15} \; dx$$

con almeno cinque decimali esatti.

$$\begin{aligned} n = 1 \quad &, \quad h = \frac{b-a}{6} = \frac{2-0}{6} \\ I_1 &= \frac{1}{3}\left(f(0) + 4f(1) + f(2)\right) = \\ &= 0.8514037 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2 \quad &, \quad h = \frac{b-a}{12} = \frac{1}{6} \\ I_2 &= \frac{(b-a)}{12}\left(f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f(2)\right) = \\ &= 0.851331 \end{aligned}$$

Stimiamo l'errore su I_2:

$$\epsilon_1 = \frac{I_2 - I_1}{15} = -0.4 * 10^{-5}$$

Quindi $I \approx 0.85132$ con 5 decimali esatti.

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata l'uguaglianza:

$$(123.65)_8 * (110100.1)_3 = (x)_6$$

$$(123.65)_8 = 1 * 8^2 + 2 + 3 * 8^0 + 6 * 8^{-1} + 5 * 8^{-2} = (83.828125)_{10}$$
$$(110100.1)_3 = 1 * 3^5 + 1 * 3^4 + 0 * 3^3 + 1 * 3^2 + 0 * 3^1 + 0 * 3^0 + 1 * 3^{-1} = 333.\overline{3}$$

Eseguiamo il calcolo in base 10
$83.828125 * 333.\overline{3} = 27942.708\overline{3}$