Università degli Studi di Ancona - Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - TEMA B

(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 16 settembre 2004

SOLUZIONI

PARTE II.
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

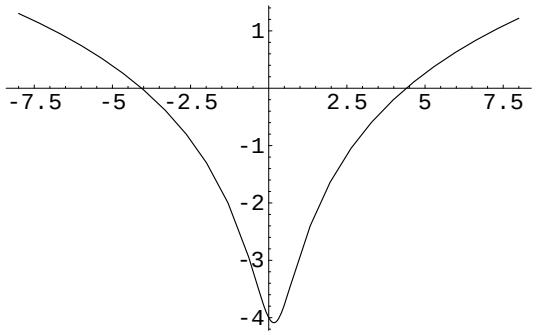
1. Determinare con il metodo della secante variabile tutte le radici dell'equazione

$$\log\left(3x^2 - x + 1\right) - 4 = 0$$

con cinque decimali esatti.

Risoluzione

Per prima cosa cerchiamo di individuare un intervallo reale in cui vi sia una sola radice, e per questo tracciamo il grafico di $f(x) = \log\left(3x^2 - x + 1\right) - 4$.



Dal grafico si evince che le radici dell'equazione sono una, positiva, nell'intervallo $[4., 5.]$ e l'altra, negativa, nell'intervallo $[-4.5, -3.5]$.

Schema iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - (\log\left(3x_n^2 - x_n + 1\right) - 4)\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{\log\left(3x_n^2 - x_n + 1\right) - \log\left(3x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1\right)}$$

L'errore si può stimare come: $\epsilon_{n+1} \leq |x_{n+1} - x_n|$.

Prendendo come valori iniziali $x_0 = 4.$ e $x_1 = 5.$, si ha:

$$f(4.) \cdot f(5.) = -0.0507859 < 0.$$

Quindi la condizione iniziale è verificata.

$x_0 =$	4.		
$x_1 =$	5.		
$x_2 =$	4.42397	$\epsilon_2 \leq$	0.57603
$x_3 =$	4.39494	$\epsilon_3 \leq$	$0.290276 \cdot 10^{-1}$
$x_4 =$	4.39678	$\epsilon_4 \leq$	$0.184001 \cdot 10^{-2}$
$x_5 =$	4.39678	$\epsilon_5 \leq$	$0.569168 \cdot 10^{-5}$
$x_6 =$	4.39678	$\epsilon_6 \leq$	$0.119294 \cdot 10^{-8}$

Un'approssimazione della radice $\in [4., 5.]$ di $f(x) = \log\left(3x^2 - x + 1\right) - 4$ con 5 decimali esatti è $x = 4.39678$.

Prendendo come valori iniziali $x_0 = -4.5$ e $x_1 = -3.5$, si ha:

$$f(-4.5) \cdot f(-3.5) = -0.0542294 < 0.$$

Quindi la condizione iniziale è verificata.

$$\begin{array}{llll}
x_0 = & \text{-4.5} & & \\
x_1 = & \text{-3.5} & & \\
x_2 = & \text{-4.09172} & \epsilon_2 \leq & 0.591723 \\
x_3 = & \text{-4.0653} & \epsilon_3 \leq & 0.264228 \cdot 10^{-1} \\
x_4 = & \text{-4.06344} & \epsilon_4 \leq & 0.186278 \cdot 10^{-2} \\
x_5 = & \text{-4.06344} & \epsilon_5 \leq & 0.59931 \cdot 10^{-5} \\
x_6 = & \text{-4.06344} & \epsilon_6 \leq & 0.127081 \cdot 10^{-8}
\end{array}$$

Un'approssimazione della radice $\in [-4.5, -3.5]$ di $f(x) = \log\left(3x^2 - x + 1\right) - 4$ con 5 decimali esatti è $x = -4.06344$.

2. Risolvere, utilizzando la decomposizione LU, il sistema $Ax = b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 3.00 & 5.10 & -2.00 \\ 2.10 & 4.77 & -0.60 \\ 3.90 & 3.27 & -2.24 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -1.6 \\ 3.4 \end{pmatrix}.$$

Scrivere tutti i passaggi.

Risoluzione

Dal momento che $A = \begin{pmatrix} 3.00 & 5.10 & -2.00 \\ 2.10 & 4.77 & -0.60 \\ 3.90 & 3.27 & -2.24 \end{pmatrix}$ è non singolare, possiamo trovare due matrici triangolari inferiore e superiore, risp. L e U, tali che $PA = LU$, ma per semplicità considereremo $P = I_3$, quindi risolveremo $A = LU$, con il metodo di Doolittle.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 3.00 & 5.10 & -2.00 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
L_2 \cdot U^{(1)} & l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} \cdot 3.00 = 2.10 \Rightarrow l_{21} = 0.70 \\
L_3 \cdot U^{(1)} & l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} \cdot 3.00 = 3.90 \Rightarrow l_{31} = 1.30 \\
 & \\
L_2 \cdot U^{(2)} & l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} \Rightarrow 0.70 \cdot 5.10 + 1 \cdot u_{22} = 4.77 \Rightarrow u_{22} = 4.20 \\
L_2 \cdot U^{(3)} & l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} = a_{23} \Rightarrow 0.70 \cdot (-2.00) + 1 \cdot u_{23} = -0.60 \Rightarrow u_{23} = 0.80 \\
 & \\
L_3 \cdot U^{(2)} & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} \Rightarrow 1.30 \cdot 5.10 + l_{32} \cdot 1.20 = 3.27 \Rightarrow l_{32} = -2.80 \\
L_3 \cdot U^{(3)} & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = a_{33} \Rightarrow u_{33} = 2.60
\end{array}$$

Quindi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0 \\ 1.3 & -2.8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 3.00 & 5.10 & -2.00 \\ 0 & 1.20 & 0.80 \\ 0 & 0 & 2.60 \end{pmatrix}$$

Risolviamo per sostituzione in avanti il sistema $Ly = b$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0 \\ 1.3 & -2.8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -1.6 \\ 3.4 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 4.2 \\
0.7y_1 + y_2 &= -1.6 \Rightarrow \ y_2 = -4.54 \\
1.3y_1 - 2.8y_2 + y_3 &= 3.4 \Rightarrow \ y_3 = -14.772
\end{aligned}
$$

Ora risolviamo per sostituzione all'indietro il sistema $Ux = y$:

$$
\begin{pmatrix} 3.00 & 5.10 & -2.00 \\ 0 & 1.20 & 0.80 \\ 0 & 0 & 2.60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -4.54 \\ -14.772 \end{pmatrix}
$$

la soluzione sarà:

$$
\begin{aligned}
2.60x_3 &= -14.772 \\
x_3 &= \tfrac{-14.772}{2.60} = -5.68154 \\
\\
1.20x_2 + 0.80x_3 &= -4.54 \\
x_2 &= \tfrac{-4.54+4.54523}{1.20} = 0.00435897 \\
\\
3.00x_1 + 5.10x_2 - 2.00x_3 &= 4.2 \\
x_1 &= -2.3951
\end{aligned}
$$

Quindi la soluzione è

$$
x \simeq \begin{pmatrix} -2.3951 \\ 0.00435897 \\ -5.68154 \end{pmatrix}
$$

Utilizzando la calcolatrice TI-89 o un'altra calcolatrice programmabile, decomponendo nella forma $LU = PA$, con P matrice di permutazione, avremmo ottenuto:

$$
L = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0.538462 & 1. & 0. \\ 0.769231 & 0.858896 & 1. \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 3.9 & 3.27 & -2.24 \\ 0 & 3.00923 & 0.606154 \\ 0 & 0 & -0.797546 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Il sistema $Ax = b$ è equivalente al sistema $PAx = Pb$, che possiamo scrivere anche come $LUx = Pb$ e risolvere prima $Ly = Pb$, dove

$$
Pb = \begin{pmatrix} 3.4 \\ -1.6 \\ 4.2 \end{pmatrix},
$$

per sostituzione all'avanti, ottenendo

$$
y = \begin{pmatrix} 3.4 \\ -3.43077 \\ 4.53129 \end{pmatrix}
$$

poi $Ux = y$ per sostituzione all'indietro, ottenendo anche in questo caso:

$$
x = \begin{pmatrix} -2.3951 \\ 0.00435897 \\ -5.68154 \end{pmatrix}.
$$

3. Scrivere la tabella delle differenze divise per il seguente insieme di dati:

x	-5	-2	1	4	7
$f(x)$	3.30	1.40	2.30	2.90	2.60

Stimare i valori di $f(x)$ nei punti $x = -0.2$ ed $x = 2.8$ usando un polinomio di Newton di grado tre.

Risoluzione

Dai dati si ricava questa tabella delle differenze divise:

x	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+4}]$
-5	3.3				
		-0.633333			
-2	1.4		0.155556		
		0.3		-0.0191358	
1	2.3		-0.0166667		0.00128601
		0.2		-0.0037037	
4	2.9		-0.05		
		-0.1			
7	2.6				

da cui:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 3.3 - 0.633333(x+5) \\
P_2(x) &= 3.3 - 0.633333(x+5) + 0.155556(x+2)(x+5) \\
P_3(x) &= 3.3 - 0.633333(x+5) + 0.155556(x+2)(x+5) - 0.0191358(x-1)(x+2)(x+5) \\
P_4(x) &= 3.3 - 0.633333(x+5) + 0.155556(x+2)(x+5) - 0.0191358(x-1)(x+2)(x+5) \\
&\quad +0.00128601(x-4)(x-1)(x+2)(x+5)
\end{aligned}$$

Poiché ci viene chiesto di stimare $f(-0.2)$ con un polinomio di grado 3, conviene usare $P_3(x)$: $P_3(-0.2) = 1.8024$.

Per stimare invece $f(2.8)$, utilizziamo il polinomio di grado 3 costruito a partire dai valori $-2, 1, 4, 7$, rispetto al quale 2.8 risulta più centrale:

$$Q_2(x) = 1.4 + 0.3(x+2) - 0.0166667(x-1)(x+2) - 0.0037037(x-4)(x-1)(x+2)$$

$$\Longrightarrow Q_2(2.8) = 2.7344.$$

Facoltativo: Determinare la regione del piano di Gauss contenente tutti gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1.5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Risoluzione

$$R = \{z \in \mathbb{C} : |z-4| \le 1.5\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z-7| \le 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z+3| \le 2\}$$
$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z-4| \le 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z-7| \le 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z+3| \le 1.5\}$$
$$R \cap S = \{z \in \mathbb{C} : |z-4| \le 1.5\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z-7| \le 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z+3| \le 1.5\}$$