Università degli Studi di Ancona - Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - TEMA A

(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 16 settembre 2004

SOLUZIONI

PARTE II.
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Trovare la radice dell'equazione $x^2 - 6x + e^x = 0$ contenuta nell'intervallo $[1.5; 2.5]$ con 4 decimali esatti, utilizzando uno dei seguenti schemi di punto fisso:

$$a)\ y = -\frac{e^x}{x-6} \qquad\qquad b)\ y = \log(-x^2 + 6x)$$

Risoluzione

Ipotesi: $g_1(x) = -\frac{e^x}{x-6}$ derivabile con derivata $g_1'(x) = \frac{e^x}{(x-6)^2} - \frac{e^x}{x-6}$ continua su $[1.5; 2.5]$, inoltre, tra $[1.5; 2.5]$ vale $g_1'(x) \geq 1.21725$, quindi $g_1(x)$ diverge.

Ipotesi: $g_2(x) = \log(-x^2 + 6x)$ derivabile con derivata $g_2'(x) = \frac{6-2x}{6x-x^2}$ continua su $[1.5; 2.5]$, dove vale $g_2'(x) \leq m = 0.444444$, quindi $g_2(x)$ converge.

Il punto iniziale sarà il punto medio di $[1.5; 2.5]$, cioè 2.0.
Lo schema iterativo è $x_{k+1} = g_2(x_k) = \log(-x_k^2 + 6x_k)$.
L'errore al passo n-esimo si stima

$$\epsilon_k \leq \frac{m}{1-m}|x_{k+1} - x_k| = \frac{0.444444}{1 - 0.444444}|x_{k+1} - x_k| \approx 0.8 \cdot |x_{k+1} - x_k|$$

cioè

$$\epsilon_k \leq 0.8 \cdot |x_{k+1} - x_k|$$

$$\begin{array}{rlrl}
x_0 = & 2.0 & & \\
x_1 = & 2.07944 & \epsilon_1 \leq & 0.063553 \\
x_2 = & 2.09833 & \epsilon_2 \leq & 0.015114 \\
x_3 = & 2.10255 & \epsilon_3 \leq & 0.003371 \\
x_4 = & 2.10347 & \epsilon_4 \leq & 0.000740 \\
x_5 = & 2.10368 & \epsilon_5 \leq & 0.000162 \\
x_6 = & 2.10372 & \epsilon_6 \leq & 0.000035
\end{array}$$

La radice cercata, con 4 decimali esatti, è 2.1037.

2. Risolvere con il metodo di Gauss con Pivot Parziale il sistema $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} -40.5 & -27.9 & 2.3 \\ 45 & 21 & 3 \\ 27 & 24.6 & 21.8 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Scrivere tutti i passaggi.

Risoluzione

Scriviamo la matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -40.5 & -27.9 & 2.3 & 0 \\ 45 & 21 & 3 & 5 \\ 27 & 24.6 & 21.8 & 13 \end{array}\right)$$

Poiché $45 > |-40|$, scambiamo la prima e la seconda riga:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -40.5 & -27.9 & 2.3 & 0 \\ 45 & 21 & 3 & 5 \\ 27 & 24.6 & 21.8 & 13 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 45 & 21 & 3 & 5 \\ -40.5 & -27.9 & 2.3 & 0 \\ 27 & 24.6 & 21.8 & 13 \end{array}\right)$$

Ora annulliamo gli elementi della prima colonna sottostanti al "Pivot":

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 45 & 21 & 3 & 5 \\ -40.5 & -27.9 & 2.3 & 0 \\ 27 & 24.6 & 21.8 & 13 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \\ R_2 - \frac{(Ab)_{21}}{(Ab)_{11}} R_1 \\ R_3 - \frac{(Ab)_{31}}{(Ab)_{11}} R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 45 & 21 & 3 & 5 \\ 0. & -9. & 5. & 4.5 \\ 0. & 12. & 20. & 10. \end{array}\right)$$

Il pivot nella seconda colonna, tralasciando la prima riga, è 12., quindi scambiamo la seconda e la terza riga:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 45 & 21 & 3 & 5 \\ 0. & -9. & 5. & 4.5 \\ 0. & 12. & 20. & 10. \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \\ R_3 \\ R_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 45 & 21 & 3 & 5 \\ 0. & 12. & 20. & 10. \\ 0. & -9. & 5. & 4.5 \end{array}\right)$$

Ora annulliamo l'elemento della seconda colonna sottostante al "Pivot":

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 45 & 21 & 3 & 5 \\ 0. & 12. & 20. & 10. \\ 0. & -9. & 5. & 4.5 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ R_3 - \frac{(Ab)_{32}}{(Ab)_{22}} R_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 45 & 21 & 3 & 5 \\ 0. & 12. & 20. & 10. \\ 0. & 0. & 20. & 12. \end{array}\right)$$

Il sistema è ora triangolare alto e si risolve per sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned} 20.x_3 &= 12. \\ x_3 &= \tfrac{12.}{20.} = 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12.x_2 + 20.x_3 &= 10. \\ x_2 &= \tfrac{10.-20.x_3}{12.} = -0.166667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45x_1 + 21x_2 + 3x_3 &= 5. \\ x_1 &= \tfrac{5-3x_3-21x_2}{45} = 0.148889 \end{aligned}$$

Quindi la soluzione approssimata sarebbe $\overline{x} = \begin{pmatrix} 0.148889 \\ -0.166667 \\ 0.6 \end{pmatrix}$.

3. Calcolare con il Metodo di Romberg

$$\int_{-3}^{5} f(x)dx$$

dove la $f(x)$ è definita dalla tabella

x	-3	-1	1	3	5
$f(x)$	4.5	4.2	4	3.6	3.8

Dare una stima dell'errore.

Risoluzione

Il metodo di Romberg fa un uso sistematico dell'estrapolazione di Richardson a partire dai valori ottenuti applicando il metodo dei trapezi (A_i) più volte, con un numero 2^n di punti ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

A_i	$\frac{\triangle A_i}{3}$	B_i	$\frac{\triangle B_i}{15}$	C_i
33.2				
32.6	-0.2	32.4		
31.9	-0.233333	31.6667	-0.0488889	31.6178

Con il metodo di Romberg l'integrale richiesto vale $I \approx 31.6178$ con <u>almeno</u> 1 decimale esatto.

Disponendo di più valori della funzione f si potrebbe procedere per ottenere valori più accurati dell'integrale, finchè però gli errori di arrotondamento non influenzino negativamente l'accuratezza dei passi successivi.

Facoltativo : Determinare x ed y in modo che sia verificata la seguente uguaglianza:

$$(x)_8 = (y)_{10} = (12)_6 * (234)_6$$

$$(12)_6 = 8; \quad (234)_6 = 94 \qquad y = 752; \quad x = 1360$$