Universita' degli Studi di Ancona - Facolta' di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica - Ing. delle Telecomunicazioni

ANALISI NUMERICA - TEMA A

(Prof. A.M.Perdon)

Ancona, 20 Luglio 2004

PARTE II.
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Dato il polinomio $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$:
   (a) Determinare la regione del piano di Gauss che contiene tutte le radici di $P(x)$;
   (b) Costruire una successione di Sturm per $P(x)$;
   (c) Determinare tutte le radici di $P(x)$ con 4 decimali esatti.

Risoluzione

(a) Poiché il termine noto del polinomio $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$ è $6 \neq 0$, ogni radice z, reale o complessa, di $P(x)$ soddisfa la diseguaglianza:

$$\frac{1}{1+\mu} \leq |z| \leq 1 + \lambda$$

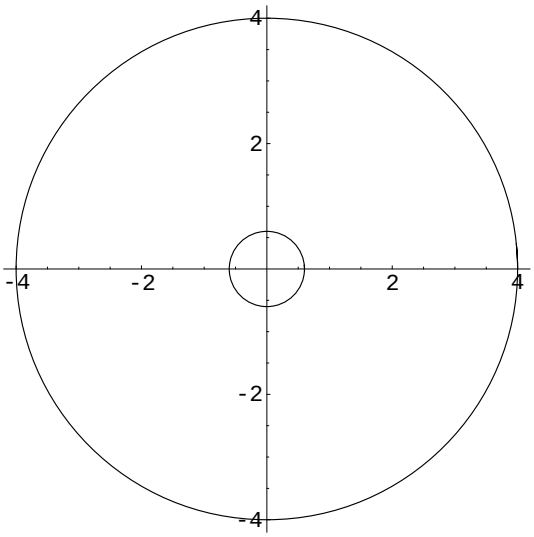
dove

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{|a_i|}{|a_0|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\mu = \max_{i=0,\ldots,n-1} \frac{|a_i|}{|a_n|} = \frac{4}{6} = 0.\overline{6}$$

La regione del piano di Gauss che contiene tutte le radici, reali e complesse, di $P(x)$, è:

$$\frac{1}{1+0.\overline{6}} = 0.6 \leq |z| \leq 4 = 1 + 3$$



Le radici reali di $P(x)$ si trovano nell'intersezione della retta reale con il piano di Gauss, e quindi nell'unione dei due intervalli:

$$[-4; -0.6] \bigcup [0.6; 4]$$

(b) Costruire una Successione di Sturm per il polinomio $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$:

$$\begin{array}{l} p_0(x) = P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6 \\ p_1(x) = -P'(x) = -6x^2 - 8x - 3 \\ p_2(x)? \end{array}$$

$$p_0(x) : p_1(x) = q_1(x) + \frac{r_1(x)}{p_1(x)}$$

cioè bisogna dividere $p_0(x)$ per $p_1(x)$; poi cambiare di segno al resto $r_1(x)$ della divisione. Si può anche raccogliere una costante per rendere monico il polinomio.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +4x^2 & +3x & +6 & -6x^2 - 8x - 3 \\ \cline{5-5} -2x^3 & -2.\overline{6}x^2 & -1x & & -\frac{1}{3}x - 0.\overline{2} \\ \cline{1-3} / & 1.\overline{3}x^2 & +2x & +6 & \\ & -1.\overline{3}x^2 & -1.\overline{7}x & -0.\overline{6} & \\ \cline{2-4} & / & 0.\overline{2}x & +5.\overline{3} & \end{array}$$

Il resto è $r_1(x) = 0.\overline{2}x + 5.\overline{3}$. Cambiando di segno al resto, si può definire $p_2(x) = -0.\overline{2}x - 5.\overline{3}$, oppure, per semplificare i calcoli successivi, si può anche renderlo monico: $p_2(x) = -x - \frac{5.\overline{3}}{0.\overline{2}} = -x - 24$.
Dividiamo ora $p_1(x)$ per $p_2(x)$ e cambiamo di segno il resto $r_2(x)$ della divisione:

$$\begin{array}{rrr|l} -6x^2 & -8x & -3 & -x - 24 \\ \cline{4-4} +6x^2 & +144x & & +6x - 136 \\ \cline{1-2} / & +136x & -3 & \\ & -136x & -3264 & \\ \cline{2-3} & / & -3267 & \end{array}$$

Il resto è $r_2(x) = -3267$.
Quindi $p_3(x) = +32671$, o, meglio, $p_3(x) = +1$.

Riassumendo, la successione di Sturm per $P(x)$ è:

$$\begin{array}{l} p_0(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6 \\ p_1(x) = -6x^2 - 8x - 3 \\ p_2(x) = -x - 24 \\ p_3(x) = 1 \end{array}$$

(c) Per determinare quante sono le radici reali di $P(x)$, studiamo ora i segni assunti dalla successione di Sturm a $-\infty, 0, +\infty$:

	$-\infty$	0	$+\infty$
$p_0(x)$	$-$	$+$	$+$
$p_1(x)$	$-$	$-$	$-$
$p_2(x)$	$+$	$-$	$-$
$p_3(x)$	$+$	$+$	$+$
	$w(-\infty) = 1$	$w(0) = 2$	$w(+\infty) = 2$

Poiché $w(+\infty) - w(0) = 2 - 2 = 0$, non ci sono radici reali positive. Poiché $w(0) - w(-\infty) = 2 - 1 = 1$, c'è UNA radice reale negativa. Le altre due radici saranno complesse coniugate.
Abbiamo già visto che le radici reali di $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$ si trovano nell'unione di intervalli:

$$[-4; -0.6] \bigcup [0.6; 4]\,.$$

Essendoci solo una radice reale negativa, questa dovrà necessariamente trovarsi nell'intervallo

$$[-4; -0.6]\,.$$

Quindi $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$ ha una sola radice reale negativa, $\in\ [-4; -0.6]$, e due radici complesse coniugate.
Vogliamo calcolare un'approssimazione della radice negativa di $P(x)$ con quattro decimali esatti.
Utilizziamo ad esempio il metodo di Newton-Raphson, con punto iniziale

$$x_0 = \frac{-4 - 0.6}{2} \approx -2.3$$

e schema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)} = x_k - \frac{2{x_k}^3 + 4{x_k}^2 + 3x_k + 6}{6{x_k}^2 + 8x_k + 3} :$$

Poichè

$$m \approx \left| \frac{P(x) \cdot P''(x)}{(P'(x))^2} \right|_{x=-2.3} = 0.248346 < 1,$$

x_0 è un buon punto iniziale e si ha:

$$\frac{m}{1-m} = 0.3304$$

l'errore si può stimare come $\epsilon_k \leq \frac{m}{1-m}|x_{k+1} - x_k| = 0.3304|x_{k+1} - x_k|$

$$\begin{array}{lll} x_0 = & \text{-2.3} & \\ x_1 = & \text{-2.03146} & \epsilon_1 \leq \quad 0.656 \cdot 10^{-1} \\ x_2 = & \text{-2.0007} & \epsilon_2 \leq \quad 0.102 \cdot 10^{-1} \\ x_3 = & \text{-2.} & \epsilon_3 \leq \quad 0.231 \cdot 10^{-3} \\ x_4 = & \text{-2.} & \epsilon_4 \leq \quad 0.117 \cdot 10^{-6} \end{array}$$

Un'approssimazione della radice negativa di $P(x)$ con 6 decimali esatti è $x = -2.000000$. Infatti $P(-2) = 0$.
Ora vogliamo determinare le radici complesse di

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6,$$

a tal fine lo dividiamo per $x + 2$, tramite il metodo di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +2 & +4 & +3 & +6 \\ -2 & & -4 & 0 & -6 \\ \hline & +2 & 0 & +3 & // \end{array}$$

Quindi $P(x) = (x + 2)(2x^2 + 3)$.
Le altre due radici di $P(x)$ si ottengono risolvendo l'equazione $2x^2 + 3 = 0$, cioé

$$x^2 = -\frac{3}{2}$$
$$x_{2,3} = \pm i \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Quindi le tre radici del polinomio

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$$

con quattro decimali esatti sono:

$$\begin{array}{l} x_1 = -2.0000 \\ x_2 = -i\ 1.2247 \\ x_3 = +i\ 1.2247 \end{array}$$

2. Risolvere il sistema $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3.78 & 5 \\ 3 & 3.4 & 2 \\ 5 & 2.8 & 1 \\ 6 & 2.15 & 5 \\ 8 & 0.64 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3.7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usare la decomposizione QR; scrivere tutti i passaggi.

Risoluzione

Il sistema $Ax = b$ è sovradeterminato e ci è richiesto di risolverlo utilizzando la decomposizione QR: si scompone $A = QR$, con Q matrice ortogonale ($Q^T \cdot Q = I$) e R matrice triangolare superiore e si risolve il sistema $Rx = Q^T b$. La soluzione trovata sarà quella che minimizza la norma $\| \cdot \|_2$ del residuo.

Se $A = QR$, con Q matrice ortogonale ($Q^T \cdot Q = I$) e R matrice triangolare superiore,

$$Q = \begin{pmatrix} 0.0860663 & 0.716412 & -0.292575 \\ 0.258199 & 0.495301 & 0.373003 \\ 0.430331 & 0.228363 & 0.468022 \\ 0.516398 & 0.0219877 & -0.730187 \\ 0.68853 & -0.434507 & 0.151822 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 11.619 & 3.95905 & 3.95905 \\ 0. & 4.80067 & 4.91097 \\ 0. & 0. & -3.89979 \end{pmatrix},$$

risolviamo il sistema $Rx = Q^T b$:

$$\begin{pmatrix} 11.619 & 3.95905 & 3.95905 \\ 0. & 4.80067 & 4.91097 \\ 0. & 0. & -3.89979 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.92299 \\ 5.66684 \\ -1.58469 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema triangolare superiore e si risolve facilmente per sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-1.58469}{-3.89979} = 0.406354 \\ x_2 &= \frac{5.66684 - 4.91097x_3}{4.80067} = 0.764737 \\ x_3 &= \frac{4.92299 - 3.95905x_3 - 3.95905x_2}{11.619} = 0.0246652 \end{aligned}$$

Quindi

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} 0.0246652 \\ 0.764737 \\ 0.406354 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il residuo:

$$r = A\widetilde{x} - b = \begin{pmatrix} -0.0528587 \\ -0.51319 \\ 0.670945 \\ 0.123946 \\ -0.313246 \end{pmatrix}$$

per cui $\|r\|_2 = 0.910939$.

Si può verificare che r è ortogonale a tutte le colonne di A, cioè $A^T r = 0$.

3. Calcolare con il Metodo di Romberg

$$\int_1^9 f(x)dx$$

dove la $f(x)$ è definita dalla tabella

x	1	3	5	7	9
$f(x)$	3.78	3.40	2.80	2.15	0.64

Dare una stima dell'errore.

Risoluzione

Il metodo di Romberg fa un uso sistematico dell'estrapolazione di Richardson a partire dai valori ottenuti applicando il metodo dei trapezi (A_i) più volte, con un numero 2^n di punti ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{9-1}{2}\left(f(1)+f(9)\right) = 17.68 \\
& h_0 = \frac{b-a}{2} = \frac{9-1}{2} = 4 \\
A_1 &= \frac{A_0}{2} + h_0 \cdot f\left(a+h_0\right) = \frac{A_0}{2} + 1 \cdot f(5) = 20.04 \\
& h_1 = \frac{b-a}{4} = \frac{9-1}{4} = 2 \\
A_2 &= \frac{A_1}{2} + h_1 \cdot \left(f(a+h_1)+f(a+3h_1)\right) = \\
&= \frac{A_1}{2} + 2 \cdot \left(f(3)+f(7)\right) = 21.12
\end{aligned}
$$

Stima dell'errore su A_1:

$$
\frac{A_1 - A_0}{3} = \frac{20.04 - 17.68}{3} = 0.786667
$$

$$
B_1 = A_1 + \frac{A_1 - A_0}{3} = 3.98277 + 0.786667 = 20.8267
$$

Stima dell'errore su A_2:

$$
\frac{A_2 - A_1}{3} = \frac{21.12 - 20.04}{3} = 0.36
$$

$$
B_2 = A_2 + \frac{A_2 - A_1}{3} = 21.12 + 0.36 = 21.48
$$

Stimiamo ora l'errore su B_2:

$$
\frac{B_2 - B_1}{15} = \frac{21.48 - 20.8267}{15} = 0.0435556
$$

La stima più accurata che si può avere con i dati disponibili è

$$
C_2 = B_2 + \frac{B_2 - B_1}{15} = 21.48 + 0.0435556 = 21.5236
$$

per il quale possiamo dire che l'errore é sicuraqmente inferiore a 0.0435556.

A_i	$\frac{\triangle A_i}{3}$	B_i	$\frac{\triangle B_i}{15}$	C_i
17.68				
20.04	0.786667	20.8267		
21.12	0.36	21.48	0.0435556	21.5236

Con il metodo di Romberg l'integrale richiesto vale $I \approx 21.5236$ con <u>almeno</u> 1 decimale esatto.

Disponendo di più valori della funzione f si potrebbe procedere per ottenere valori più accurati dell'integrale, finchè però gli errori di arrotondamento non influenzino negativamente l'accuratezza dei passi successivi.

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata l'uguaglianza :

$$
(1737.53)_{10} = (5031.35)_x
$$

Risoluzione

Uguagliando le parti decimali si ha:

$$0.53 = \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}$$

da cui

$$0.53x^2 = 3x + 5$$

cioè

$$0.53x^2 - 3x - 5 = 0,$$

che ha come soluzioni: 7.0 e -1.3.
Di queste solo la prima è intera e quindi accettabile: x=7.

Oppure, meno facile da calcolare:

Uguagliando le parti intere si ha:

$$1737 = 5x^3 + 3x + 1$$

da cui

$$5x^3 + 3x - 1736 = 0,$$

che ha come soluzioni: 7.0 e $\frac{1}{10}(-35 \pm 3i\ \sqrt{415})$.
Di queste solo la prima è intera e quindi accettabile, x=7.