Università Politecnica delle Marche – Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica – Ing. delle Telecomunicazioni
Teledidattica

ANALISI NUMERICA – Secondo Parziale – TEMA C
(Prof. A. M. Perdon)

Ancona, 23 giugno 2006

PARTE II - SOLUZIONE
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Data la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinare l'autovalore di modulo minimo ed il corrispondente autovettore con il metodo delle potenze inverse. Fare almeno 5 passi.
(λ= …., v=….).

Soluzione:
si applica il metodo delle potenze inverse alla matrice A :

Si calcola A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.122494 & 0.131403 & 0.218263 & 0.129176 \\ 0.0801782 & -0.2049 & 0.0155902 & -0.13363 \\ 0.146993 & -0.0423163 & -0.138085 & -0.244989 \\ 0.0601336 & -0.153675 & -0.238307 & -0.100223 \end{pmatrix}$$

Scegliendo come vettore arbitrario di partenza

$$z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

implementando il metodo delle potenze inverse

$z_0 =$ vettore arbitrario

K=0, 1, ...

$\alpha_k = \|z_k\|_2$

$y_k = \dfrac{z_k}{\alpha_k}$

$z_{k+1} = A^{-1} \cdot y_k$

$$\sigma_k = y_k^T \cdot z_{k+1}$$

$$\beta_k = \frac{1}{\sigma_k}$$

si ottengono i seguenti valori per k=0,...,5

y_k	z_{k+1}	σ_k	β_k
$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.300668 \\ -0.121381 \\ -0.139198 \\ -0.216036 \end{pmatrix}$	-0.0879733	-11.3671
$\begin{pmatrix} 0.726705 \\ -0.293373 \\ -0.336437 \\ -0.522151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.090414 \\ 0.182908 \\ 0.293613 \\ 0.22129 \end{pmatrix}$	-0.333694	-2.99676
$\begin{pmatrix} -0.215023 \\ 0.434992 \\ 0.698272 \\ 0.526273 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.251209 \\ -0.16581 \\ -0.275366 \\ -0.298925 \end{pmatrix}$	-0.475738	-2.102
$\begin{pmatrix} 0.496707 \\ -0.32785 \\ -0.544472 \\ -0.591055 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.177425 \\ 0.177496 \\ 0.306871 \\ 0.26924 \end{pmatrix}$	-0.472539	-2.11623
$\begin{pmatrix} -0.370243 \\ 0.370391 \\ 0.640366 \\ 0.561839 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.215662 \\ -0.170674 \\ -0.296166 \\ -0.288097 \end{pmatrix}$	-0.494581	-2.02191
$\begin{pmatrix} 0.434505 \\ -0.343864 \\ -0.596699 \\ -0.580442 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.197177 \\ 0.173558 \\ 0.303017 \\ 0.279343 \end{pmatrix}$	-0.488307	-2.04789

L'autovalore di modulo minimo di A è

$\boxed{\lambda_{minA}=\beta_4 = -2.\ 022}$

il cui autovettore corrispondente è pari a

$$v_{\lambda min}= \begin{pmatrix} 0.215662 \\ -0.170674 \\ -0.296166 \\ -0.288097 \end{pmatrix}$$

2. Trovare i 5 nodi di Chebyshev nell'intervallo [1, 4]. Utilizzarli come punti base per scrivere la tabella delle differenze divise per la funzione $f(x) = 5 - e^{\frac{1}{x}} + 2x^2$ e scrivere il corrispondente polinomio di Newton di grado quattro. Usarlo per stimare il valore di *f* in 2.8.

Soluzione:

i nodi di Chebyshev nell'intervallo [-1,1] sono le radici del polinomio di Chebyshev di grado 5, essi vengono definiti nell'intervallo [-1,1] mediante i punti t_k

$$t_k = -\cos\left(\frac{2k+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right), k = 0,...,n$$

e quindi adattati all'intervallo voluto calcolando i nodi

$$x_k = \frac{a+b}{2} + t_k \cdot \frac{b-a}{2}, k = 1,...,n$$

si costruisce la sequenza dei nodi e delle loro immagini mediante la funzione *f(x)* desiderata

x_k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x_k)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$

E la tabella delle differenze divise per la funzione *f(x)* per poi determinare il polinomio di Newton corrispondente.

Posto allora *n=4* si calcolano i punti t_k per *k=0,1,2,3,4*

$\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$= `{-0.951057, -0.587785, 0., 0.587785, 0.951057}`

Posto inoltre *a=1, b=4* si calcolano i nodi x_k per *k=0,1,2,3,4* che corrispondono a:

$\{x_0x, x_2, x_3, x_4\}$= `{1.07342, 1.61832, 2.5, 3.38168, 3.92658}`

la tabella delle differenze divise per la funzione *f(x)* diventa:

x_k	1.07342	1.61832	2.5	3.38168	3.92658
$f(x_k)$	4.76586	8.382886	16.0082	26.5274	34.5461

Si determina il polinomio di Newton impostando la tabella delle differenze divise:

$x_0 \quad f(x_0)$

$$f[x_1,x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$x_1 \quad f(x_1)$ $\qquad f[x_2,x_1,x_0] = \dfrac{f[x_2,x_1] - f[x_1,x_0]}{x_2 - x_0}$

$$f[x_2,x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad f[x_3,x_2,x_1,x_0]$$

$x_2 \quad f(x_3)$ $\qquad f[x_3,x_2,x_1] = \dfrac{f[x_3,x_2] - f[x_2,x_1]}{x_3 - x_1}$ $\qquad f[x_4,.....,x_0]$

$$f[x_3,x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \qquad f[x_4,x_3,x_2,x_1]$$

$x_3 \quad f(x_4)$ $\qquad f[x_4,x_3,x_2] = \dfrac{f[x_4,x_3] - f[x_3,x_2]}{x_4 - x_2}$

$$f[x_4,x_3] = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

$x_4 \quad f(x_5)$

Il calcolo dei valori in tabella porta al seguente risultato

1.07342	4.76586	0	0	0	0
1.61832	8.38286	6.63784	0	0	0
2.5	16.0082	8.64864	1.40952	0	0
3.38168	26.5274	11.9309	1.86139	0.195758	0
3.92658	34.5461	14.7157	1.95206	0.0392808	-0.0548434

Da cui si può impostare il polinomio di Newton

$$P_1(x) = 4.76586 + 6.63784(x - 1.07342)$$

$$P_2(x) = 4.76586 + 6.63784(x - 1.07342) + 1.40952(x - 1.07342)(x - 1.61832)$$

$$P_3(x) = 4.76586 + 6.63784(x - 1.07342) + 1.40952(x - 1.07342)(x - 1.61832) +$$
$$1.40952(x - 1.07342)(x - 1.61832)(x - 2.5)$$

$$P_4(x) = 4.76586 + 6.63784(x - 1.07342) + 1.40952(x - 1.07342)(x - 1.61832) +$$
$$+ 0.195758(x - 1.07342)(x - 1.61832)(x - 2.5) -$$
$$- 0.0548434(x - 1.07342)(x - 1.61832)(x - 2.5)(x - 3.38168)$$

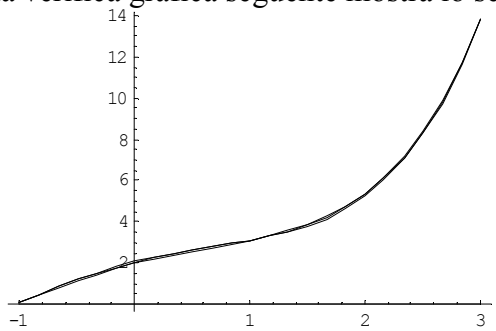
Stimando allora *f(2.8)* con $P_4(x)$ si ottiene:

$$\boxed{P_4(2.8) = 19.2418}$$

mentre risulta

$$f(2.8) = 19.2508$$

la verifica grafica seguente mostra lo scostamento tra *f(x)* e *P(x)*



3. Calcolare con il metodo di Cavalieri-Simpson

$$\int_{3.4}^{5.0} f(x)dx$$

dove la *f(x)* è definita dalla seguente tabella

x	3.4	3.8	4.2	4.6	5.
f(x)	3.99	5.08	5.7	5.01	4.6

Dare una stima dell'errore.

Soluzione:
Il metodo di Cavalieri-Simpson calcola iterativamente l'integrale suddividendo l'intervallo in *n* sottointervalli e stimando l'errore mediante estrapolazione.
Essendo la funzione definita in forma tabellare, possiamo applicare la formula semplice e quella composita su 2 sottointervalli e stimare l'errore mediante estrapolazione

$$I_0 = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(a+h)+f(b)\right)$$

$$I_1 = \frac{b-a}{12}\left(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+f(b)\right)$$

$$I_2 = \frac{b-a}{24}(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+2f(a+4h)$$
$$+4f(a+5h)+2f(a+6h)+4f(a+7h)+f(b))$$

$$I_3 = \frac{b-a}{24}(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+2f(a+4h)$$
$$+4f(a+5h)+2f(a+6h)+4f(a+7h)+2f(a+8h)+4f(a+9h)+2f(a+10h)$$
$$+4f(a+11h)+2f(a+12h)+4f(a+13h)+2f(a+14h)+4f(a+15h)+f(b))$$

$$\varepsilon_i = \frac{I_i - I_{i-1}}{15}$$

Implementando l'algoritmo si ottiene
a=3.4 *b=5*
n=1

$$h = \frac{b-a}{2} = 0.8$$

$$I_0 = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(a+h)+f(b)\right) = \frac{5-3.4}{6}\left(f(3.4)+4f(4.2)+f(5)\right) = 8.37067$$

n=2

$$h = \frac{b-a}{4} = 0.4$$

$$I_1 = \frac{b-a}{12}\left(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+f(b)\right) =$$
$$= \frac{5-3.4}{12}\left(f(3.4)+4f(3.8)+2f(4.2)+4f(4.6)+f(5)\right) = 8.04667$$

La stima dell'errore su I_1 è $\varepsilon_1 = \frac{I_1 - I_0}{15} = -0.0216$

il risultato arrotondato ad 1 decimale esatto è $\boxed{I_1 \cong 8.0}$
oppure $\boxed{I_1 + \varepsilon_1 \cong 8.02507}$ con almeno 1 decimale esatto.

Facoltativo: Verificare quale dei due vettori $v_1=(1, -1, 1)^T$, $v_2=(1, -1, -1)^T$ è autovettore della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2.3 & 0 & 0.9 \\ 4.05 & 9.5 & -4.05 \\ 0.9 & 0 & 2.3 \end{bmatrix}$$

Determinare il corrispondente autovalore e motivare le risposte.

Soluzione:

è sufficiente verificare che i due vettori soddisfino la definizione di autovettore ovvero che per un dato autovalore λ_i risulta

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \qquad\qquad Av_2 = \lambda_2 v_2$$

In particolare

$$A \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 2.3 & 0 & 0.9 \\ 4.05 & 9.5 & -4.05 \\ 0.9 & 0 & 2.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ -1.4 \\ -1.4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 2.3 & 0 & 0.9 \\ 4.05 & 9.5 & -4.05 \\ 0.9 & 0 & 2.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ -9.5 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

Si farà il rapporto tra le singole componenti del vettore Av_i e v_i; se il valore di tale rapporto è lo stesso per tutte le componenti, v_i sarà autovettore e il rapporto trovato sarà il corrispondente autovalore λ_i

$$\frac{(A \cdot v_1)_1}{(v_1)_1} = \frac{1.4}{1} = 1.4$$
$$\frac{(A \cdot v_1)_2}{(v_1)_2} = \frac{-1.4}{-1} = 1.4$$
$$\frac{(A \cdot v_1)_3}{(v_1)_3} = \frac{-1.4}{-1} = 1.4$$

Quindi $\boxed{v_1 \text{ è autovettore ed ha autovalore corrispondente } \lambda_1=1.4}$

$$\frac{(A \cdot v_2)_1}{(v_2)_1} = \frac{3.2}{1} = 3.2$$
$$\frac{(A \cdot v_2)_2}{(v_2)_2} = \frac{-9.5}{-1} = 9.5$$
$$\frac{(A \cdot v_2)_3}{(v_2)_3} = \frac{3.2}{1} = 3.2$$

Quindi $\boxed{v_2 \text{ non è autovettore}}$