Università Politecnica delle Marche – Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica – Ing. delle Telecomunicazioni
Teledidattica

ANALISI NUMERICA – Secondo Parziale – TEMA A
(Prof. A. M. Perdon)

Ancona, 23 giugno 2006

PARTE II - SOLUZIONE
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Data la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinare l'autovalore più prossimo a $q=4$ ed il corrispondente autovettore. Fare almeno 5 passi (λ= …., v=….).

Soluzione:
si applica il metodo delle potenze inverse alla matrice:

$$S = A - q \cdot I_{4x4} = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcola S^{-1}

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 5.90909 & 1.90909 & 4.54545 & -1.63636 \\ 1.81818 & 0.484848 & 1.42424 & -0.606061 \\ 3.45455 & 1.12121 & 2.60606 & -1.15152 \\ -2.09091 & -0.757576 & -1.78788 & 0.69697 \end{pmatrix}$$

Scegliendo come vettore arbitrario di partenza

$$z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

implementando il metodo delle potenze inverse

$z_0 =$ vettore arbitrario

K=0, 1, ...

$\alpha_k = \|z_k\|_2$

$y_k = \dfrac{z_k}{\alpha_k}$

$$z_{k+1} = A^{-1} \cdot y_k$$
$$\sigma_k = y_k^T \cdot z_{k+1}$$
$$\beta_k = \frac{1}{\sigma_k}$$

si ottengono i seguenti valori per k=0,...,5

y_k	z_{k+1}	σ_k	β_k
$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.36364 \\ 1.56061 \\ 3.01515 \\ -1.9697 \end{pmatrix}$	3.98485	0.250951
$\begin{pmatrix} 0.806996 \\ 0.234804 \\ 0.45365 \\ -0.296354 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.76387 \\ 2.40683 \\ 4.57457 \\ -2.88286 \end{pmatrix}$	9.76014	0.102458
$\begin{pmatrix} 0.795268 \\ 0.246536 \\ 0.468582 \\ -0.295297 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.7831 \\ 2.41182 \\ 4.5849 \\ -2.89318 \end{pmatrix}$	9.787	0.102176
$\begin{pmatrix} 0.795249 \\ 0.246431 \\ 0.468468 \\ -0.295615 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.78279 \\ 2.41176 \\ 4.58479 \\ -2.89308 \end{pmatrix}$	9.78666	0.10218
$\begin{pmatrix} 0.795245 \\ 0.246434 \\ 0.468473 \\ -0.295615 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.7828 \\ 2.41176 \\ 4.58479 \\ -2.89309 \end{pmatrix}$	9.78666	0.10218
$\begin{pmatrix} 0.795245 \\ 0.246434 \\ 0.468473 \\ -0.295615 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.7828 \\ 2.41176 \\ 4.58479 \\ -2.89309 \end{pmatrix}$	9.78666	0.10218

L'autovalore di A più vicino a *q=4* è

$\boxed{\lambda_A = \beta_5 + q = 0.10218 + 4 = 4.10218}$

2. Scrivere la tabella delle differenze divise per il seguente insieme di dati:

x	3.4	4.0	4.6	5.2	5.8
$f(x)$	3.99	5.08	5.7	5.01	4.6

Stimare i valori di $f(x)$ nei punti $x=4.3$ ed $x=4.8$ usando un polinomio di Newton di grado tre.

Soluzione:
Si determina il polinomio di Newton impostando la tabella delle differenze divise:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f[x_1,x_0]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_2,x_1,x_0]=\dfrac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0} & & \\
 & & f[x_2,x_1]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & & f[x_3,x_2,x_1,x_0] & \\
x_2 & f(x_3) & & f[x_3,x_2,x_1]=\dfrac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1} & & f[x_4,.....,x_0] \\
 & & f[x_3,x_2]=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} & & f[x_4,x_3,x_2,x_1] & \\
x_3 & f(x_4) & & f[x_4,x_3,x_2]=\dfrac{f[x_4,x_3]-f[x_3,x_2]}{x_4-x_2} & & \\
 & & f[x_4,x_3]=\dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} & & & \\
x_4 & f(x_5) & & & &
\end{array}
$$

Il calcolo dei valori in tabella porta al seguente risultato

3.4	3.99	0	0	0	0
4.	5.08	1.81667	0	0	0
4.6	5.7	1.03333	-0.652778	0	0
5.2	5.01	-1.15	-1.81944	-0.648148	0
5.8	4.6	-0.683333	0.388889	1.22685	0.78125

Da cui si può impostare il polinomio di Newton

$$P_1(x) = 3.99 + 1.81667(x-3.4)$$
$$P_2(x) = 3.99 + 1.81667(x-3.4) - 0.652778(x-3.4)(x-4)$$
$$P_3(x) = 3.99 + 1.81667(x-3.4) - 0.652778(x-3.4)(x-4) - 0.648148(x-3.4)(x-4)(x-4.6)$$
$$P_4(x) = 3.99 + 1.81667(x-3.4) - 0.652778(x-3.4)(x-4) - 0.648148(x-3.4)(x-4)(x-4.6) +$$
$$+ 0.78125(x-3.4)(x-4)(x-4.6)(x-5.2)$$

Poiché viene chiesto di stimare $f(4.3)$ e $f(4.8)$ con un polinomio di Newton di grado tre

- per la stima di $f(4.3)$ conviene usare il polinomio ($P_3(x)$) costruito a partire dai valori *3.4, 4, 4.6 e 5.2*, rispetto ai quali *4.3* risulta più centrale, pertanto si userà

$$P_3(x) = 3.99 + 1.81667(x-3.4) - 0.652778(x-3.4)(x-4)$$
$$-0.648148(x-3.4)(x-4)(x-4.6)$$

dal quale si ottiene

$$\boxed{f(4.3)=P_3\,(4.3)=5.50125}$$

- per la stima di *f(4.8)* conviene usare il polinomio (*Q(x))* costruito a partire dai valori *4, 4.6, 5.2 e 5.8*, rispetto ai quali *4.8* risulta più centrale, pertanto si userà
$$Q(x) = 5.08 + 1.03333(x-4) - 1.81944(x-4)(x-4.6) + 1.22685(x-4)(x-4.6)(x-5.2)$$
dal quale si ottiene

$$\boxed{f(4.8)=Q(4.8)=5.53704}$$

3. Calcolare con il metodo di Romberg il seguente integrale:

$$\int_1^3 \frac{5 - e^{\frac{1}{x}} + 2x^2}{56} dx$$

Con quattro decimali esatti.

Soluzione:
Il metodo di Romberg utilizza le formule composite dei trapezi di ordine crescente, stimando l'errore con l'estrapolazione di Richardson.
Si applicherà il metodo dei trapezi all'intervallo di integrazione dividendolo in un numero $n=2^m$ di sottointervalli dove $m=0, 1, 2$ e trovando ogni volta il valore A_m secondo il seguente schema:

$$A_0 = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$h_0 = \frac{b-a}{2}$$

$$A_1 = \frac{A_0}{2} + \frac{h_0}{2} f(a + h_0)$$

$$h_1 = \frac{b-a}{4}$$

$$A_2 = \frac{A_1}{2} + \frac{h_1}{4}\left[f(a + h_1) + f(a + 3h_1)\right]$$

$$h_2 = \frac{b-a}{8}$$

$$A_3 = \frac{A_2}{2} + \frac{h_2}{4}\left[f(a + h_2) + f(a + 3h_2) + f(a + 5h_2) + f(a + 7h_2)\right]$$

…….

Dividiamo l'intervallo [1, 3] in $n=4$ intervalli eguali i cui nodi saranno:
$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = [1, 1.5, 2, 2.5, 3]$
I valori approssimati ottenibili con il metodo dei trapezi sono
$a=1, b=3$

$m=0, n=1,$

$$A_0 = \frac{b-a}{2}\left[f(1) + f(3)\right] = 0.462252$$

$m=1, n=2,$

$$h_0 = \frac{b-a}{2} = 2$$

$$A_1 = \frac{A_0}{2} + \frac{h_0}{2} f(2) = 0.433827$$

$m=2, n=4,$

$$h_1 = \frac{b-a}{4} = 1$$

$$A_2 = \frac{A_1}{2} + \frac{h_1}{4}\left[f(1.5) + f(2.5)\right] = 0.427275$$

La stima dell'errore su A_1 e A_2 mediante estrapolazione di Richardson da:

$$\Delta A_1 = \frac{A_1 - A_0}{3} = -0.00947485$$

$$\Delta A_2 = \frac{A_2 - A_1}{3} = -0.0021842$$

Ponendo:

$$B_1 = A_1 + \Delta A_1 = 0.424353$$

$$B_2 = A_2 + \Delta A_2 = 0.425091$$

La stima dell'errore su B_2 mediante estrapolazione di Richardson da:

$$\Delta B_2 = \frac{B_2 - B_1}{15} = 0.0000492038$$

La stima più accurata ottenibile dai dati disponibili è:

$$\boxed{C_2 = B_2 + \Delta B_2 = 0.42514}$$

ed ha almeno 4 decimali esatti

I dati precedenti riuniti in tabella sono:

A_i	ΔA_i	B_i	ΔB_i	C_i
0.462252	0	0	0	0
0.433827	-0.00947485	0.424353	0	0
0.427275	-0.0021842	0.425091	0.0000492038	0.42514

Facoltativo: Determinare le regioni del piano di Gauss dove sono localizzati gli autovalori della matrice seguente

$$A = \begin{bmatrix} 2.69 & 0 & 0.42 \\ 3.615 & 9.5 & -3.615 \\ 0.42 & 0 & 2.69 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
Per il teorema di Gershgorin:

tutti gli autovalori della matrice A di ordine *n* appartengono alla regione

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in C : |z - a_{ii}| \le P_i\}, \quad \text{dove} \quad P_i = \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}|$$

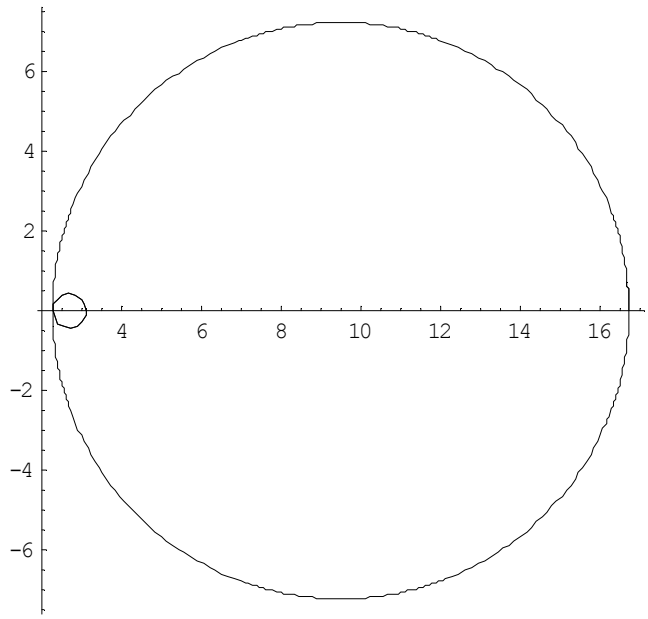
e gli autovalori reali della matrice A appartengono all'intersezione fra la regione sopra descritta e l'asse reale.

la regione del piano di Gauss che contiene tutti gli autovalori di A è l'unione di n cerchi, ognuno centrato in un elemento diagonale di A e raggio uguale alla somma dei valori assoluti degli elementi extradiagonali sulla stessa riga

in questo caso si ha: *n=3*

$$\boxed{R = \{z \in C : |z - 2.69| \le 0.42\} \cup \{z \in C : |z - 9.5| \le 7.23\} \cup \{z \in C : |z - 2.69| \le 0.42\}}$$

il risultato grafico è il seguente:



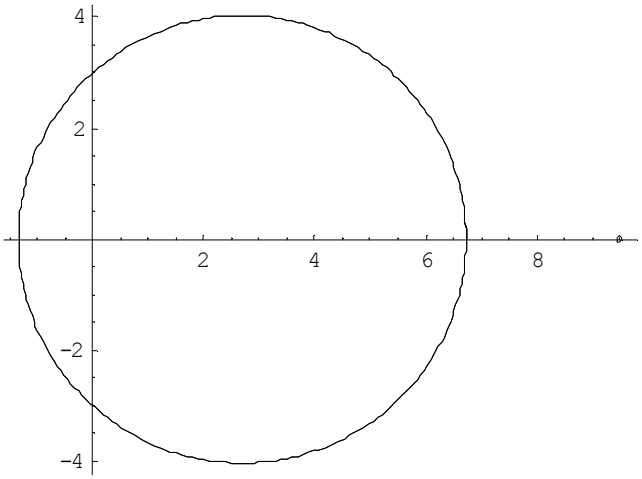
Gli stessi autovalori di A appartengono anche alla unione degli n cerchi, di ordine n descritti sul piano di Gauss

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in C : |z - a_{ii}| \le Q_i\}, \quad \text{dove} \quad Q_i = \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ji}|$$

in questo caso si ha:
n=3

$$\boxed{S = \{z \in C : |z - 2.69| \le 4.035\} \cup \{z \in C : |z - 9.5| \le 0\} \cup \{z \in C : |z - 2.69| \le 4.035\}}$$

il risultato grafico è il seguente:



In definitiva gli autovalori appartengono alla regione intersezione $R \cap S$ il cui grafico è il seguente: