Università Politecnica delle Marche – Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica – Ing. delle Telecomunicazioni
Teledidattica

ANALISI NUMERICA – Primo Parziale – TEMA D
(Prof. A. M. Perdon)

Ancona, 26 maggio 2006

PARTE II - SOLUZIONE
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Dato il polinomio $P(x) = x^3 + 2.55x^2 - 19.48x + 19.53$:

   a) Determinare la regione del piano di Gauss contenente tutte le radici di $P(x)$ e gli intervalli di $\Re$ in cui si trovano le radici reali;
   b) Calcolare tutte le radici di $P(x)$ con almeno quattro decimali esatti.

Risultato: $x_{1=}$ $x_{2=}$ $x_{3=}$

Soluzione:
La regione del piano di Gauss all'interno della quale si trovano le radici di *P(x)* è delimitata dalle equazioni di due circonferenze con centro nell'origine descritte dalla disuguaglianza $\frac{1}{1+\mu} \le |z| \le 1+\lambda$

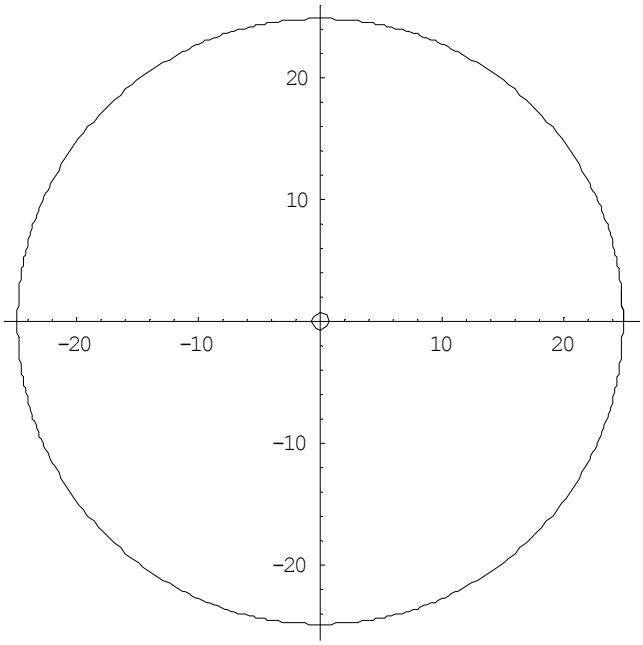
Dove

$\lambda = \max_{i=1,..,n} \frac{|a_i|}{|a_0|} = 19.53$, $\quad 1+\lambda = 20.53$

$\mu = \max_{i=0,..,n-1} \frac{|a_i|}{|a_0|} = 0.99744$, $\quad \frac{1}{1+\mu} = 0.500641$

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0, a_i \in C$

Quindi le radici negative $\in$ [-19.53, -0.500641], quelle positive $\in$ [0.500641, 19.53]



Individuata la regione di appartenenza si procederà a determinare le radici.
polinomio di partenza:

$$p_0(x) = P(x) = x^3 + 2.55x^2 - 19.48x + 19.53$$

calcolo di $p_1(x)=-P'(x)$:

$$p_1(x) = -3x^2 - 5.1x + 19.48$$

Il resto della divisione $r_1(x)=\dfrac{p_0(x)}{p_1(x)}$ è

$$r_1(x) = -14.4317x + 25.0493$$

Raccogliendo in $r_1(x)$ la costante positiva del termine di grado massimo
c_1= 14.4317

si calcola $p_2(x)= -\dfrac{r_1(x)}{c_1}$

$$p_2(x) = x - 1.73572$$

Il resto della divisione $r_2(x)= \dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ è

$$r_2(x) = 1.58966$$

Raccogliendo in $r_2(x)$ la costante positiva
c_2= 1.58966

si calcola di $p_3(x)= -\dfrac{r_2(x)}{c_2}$

$p_3(x) = -1$

Verifica del numero e del segno delle radici reali della successione di Sturm

$$\begin{array}{ccc} -\infty & 0 & +\infty \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & | & 1 & | & 1 \\ -1 & | & 1 & | & -1 \\ -1 & | & -1 & | & 1 \\ -1 & | & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Le radici reali negative sono: 1-0=1
Le radici reali positive sono: 3-1=2

Si calcoleranno i valori delle radici con il metodo di Newton Raphson valutando l'errore con m e si prende come punto iniziale un punto intermedio $\dfrac{1}{1+\mu} \le x_0 \le 1+\lambda$, in particolare si sceglie arbitrariamente $x_0=-7$ e si applica lo schema iterativo $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ stimiamo l'errore calcolando $m = \left| \dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|_{x=-7.0} = 0.272059$, $\left. \dfrac{m}{1-m} \right|_{x=-7.0} = 0.373737$

x_k	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$	$e_k \le \dfrac{m}{1-m}\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$
-6.32302	0.676977	0.253011
-6.20362	0.119408	0.0446271
-6.2	0.00361234	0.00135007
-6.2	3.2627×10^{-6}	1.21939×10^{-6}
-6.2	2.66009×10^{-12}	9.94177×10^{-13}
-6.2	0.	0.

la radice cercata è

$x_1 = -6.2$

Le altre radici di P(x) saranno le radici del polinomio ottenuto dal seguente rapporto
$q(x)=\dfrac{P(x)}{(x+6.2)} = x^2 - 3.65x + 3.15$
risolvendo l'equazione di secondo grado risultante si determinano le altre due radici

$x_2 = 1.4$

$x_3 = 2.25$

2. Risolvere con il metodo di Gauss con Pivot Parziale il sistema $Ax=b$, con

$$A = \begin{bmatrix} -2.925 & -2.26 & 1.285 \\ 3.25 & 0.72 & -2.23 \\ 2.60 & 2.50 & -2.19 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3.168 \\ 0.316 \\ -4.882 \end{bmatrix}$$

Scrivere tutti i passaggi

Soluzione:
matrice aumentata di partenza:

[A|b]= $\begin{pmatrix} -2.925 & -2.26 & 1.285 & 3.168 \\ 3.25 & 0.72 & -2.23 & 0.316 \\ 2.6 & 2.5 & -2.19 & -4.882 \end{pmatrix}$

si scambiano le righe 1 e 2:

$$\begin{pmatrix} 3.25 & 0.72 & -2.23 & 0.316 \\ -2.925 & -2.26 & 1.285 & 3.168 \\ 2.6 & 2.5 & -2.19 & -4.882 \end{pmatrix}$$

si annulla il termine $[A|b]_{(2,1)}$ e $[A|b]_{(3,1)}$

$$\begin{pmatrix} 3.25 & 0.72 & -2.23 & 0.316 \\ 0. & 1.924 & -0.406 & -5.1348 \\ 0. & -1.612 & -0.722 & 3.4524 \end{pmatrix}$$

si scambiano le righe 2 e 3:

$$\begin{pmatrix} 3.25 & 0.72 & -2.23 & 0.316 \\ 0. & 1.924 & -0.406 & -5.1348 \\ 0. & -1.612 & -0.722 & 3.4524 \end{pmatrix}$$

si annulla il termine $[A|b]_{(3,2)}$ e si ottiene la matrice triangolare alta finale:

$$\begin{pmatrix} 3.25 & 0.72 & -2.23 & 0.316 \\ 0. & 1.924 & -0.406 & -5.1348 \\ 0. & 0. & -1.06216 & -0.84973 \end{pmatrix}$$

risolvendo per sostituzione all'indietro il nuovo sistema $Ax=b$ ammette la seguente soluzione:

$x_1=1.2$
$x_2=-2.5$
$x_3=0.8$

3. Calcolare la norma massima per righe della matrice A dell'esercizio precedente. Stimare e calcolare l'indice di condizionamento di A nella stessa norma.

Soluzione:

Norma massima per righe

$$\begin{bmatrix} 6.47 \\ 6.2 \\ 7.29 \end{bmatrix}$$

Norma ∞

$$\|A\|_\infty = \max \begin{bmatrix} 6.47 \\ 6.2 \\ 7.29 \end{bmatrix} = 7.29$$

Matrice inversa di A:

$$\begin{pmatrix} -0.601984 & 0.261514 & -0.61951 \\ -0.198669 & -0.461441 & 0.353298 \\ -0.941476 & -0.216285 & -0.788804 \end{pmatrix}$$

Norma ∞ inversa

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1.94656$$

Indice di condizionamento calcolato con Norma ∞

$$k_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 14.1905$$

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata l'uguaglianza:

$$(322.513)_6=(1322.32)_x$$

Soluzione:

$$(322.513)_6=(1322.32)_x$$
$$x=4$$

i passi che portano al risultato sono riassunti di seguito:

si trasforma il numero nella base nota in base 10

$$(322.513)_6=(y)_{10}$$
$$y=122.875$$

si eguagliano le parti decimali di y e del numero in base incognita ottenendo un'equazione di 2° grado (se il numero di cifre intere era < di quelle frazionarie conveniva eguagliare le parti intere)

$$0.875=\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}$$
$$x_1=-0.571429 \quad , \quad x_2=4$$

Scartando la soluzione negativa e selezionando quella intera si ottiene

$$x= x_2=4$$