Università Politecnica delle Marche – Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica – Ing. delle Telecomunicazioni
Teledidattica

ANALISI NUMERICA – Primo Parziale – TEMA C
(Prof. A. M. Perdon)

Ancona, 26 maggio 2006

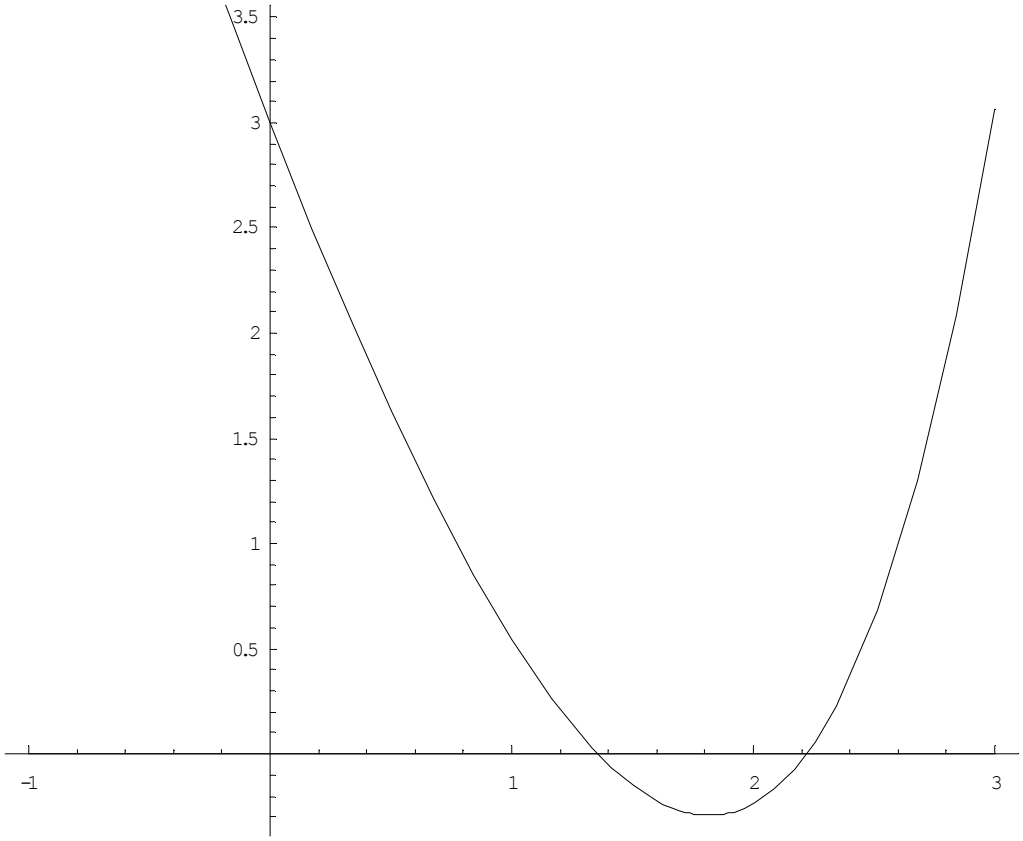
PARTE II - SOLUZIONE
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Trovare tutte le radici dell'equazione

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 3x + 2 = 0$$

con 4 decimali esatti, utilizzando il metodo della secante variabile..

Soluzione:
la funzione presenta il seguente grafico:



Utilizziamo il metodo della secante variabile, con intervalli [1, 1.5] e [1.5, 2.5] (l'analisi del grafico dell'equazione mostra la presenza di n. 2 radici reali distinte una compresa nell'intervallo [1, 1.5] e l'altra compresa nell'intervallo [1.5, 2.5]).

Nell'intervallo [a, b]=[1, 1.5] si verifica la condizione di applicabilità del metodo della secante variabile *f(a)*f(b)<0* e si applica lo schema iterativo

$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ stimando l'errore con lo scarto $\Delta x_k = |x_{k+1} - x_k|$

x_k	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
1.3305	0.169504
1.3564	0.025908
1.35698	0.000576154
1.35698	2.89603×10^{-7}

$x \cong 1.3570$

Nell'intervallo [a, b]=[1.5, 2] si verifica la condizione di applicabilità del metodo della secante variabile *f(a)*f(b)<0* e si applica lo schema iterativo

$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ stimando l'errore con lo scarto $\Delta x_k = |x_{k+1} - x_k|$

x_k	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
2.29271	0.207294
2.22786	0.0648438
2.22137	0.00649102
2.22131	0.0000634265
2.22131	6.03147×10^{-9}

$x \cong 2.2213$

2. Dato il polinomio $P(x) = 2x^4 + 14.1x^3 - 25.56x^2 - 47.52x$,

   a) determinare la regione del piano di Gauss contenente tutte le radici di $P(x)$ e gli intervalli di $\Re$ in cui si trovano le radici reali;
   b) calcolare la successione di Sturm e determinare numero e segno delle radici di *P(x);*

Soluzione:

a) La regione del piano di Gauss all'interno della quale si trovano le radici di *P(x)* è delimitata dalle equazioni di due circonferenze con centro nell'origine descritte dalla disuguaglianza $\frac{1}{1+\mu} \le |z| \le 1+\lambda$

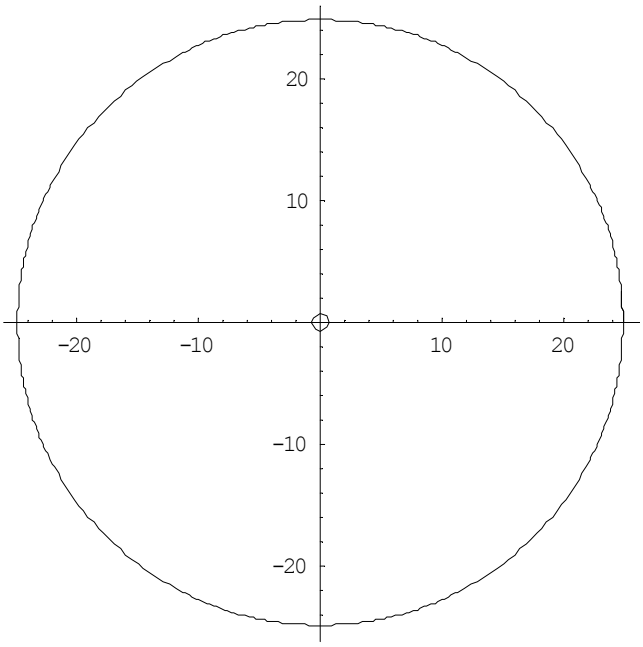
Dove

$$\lambda = \max_{i=1,..,n} \frac{|a_i|}{|a_0|} = 23.76, \qquad 1+\lambda = 24.76$$

$$\mu = \max_{i=0,..,n-1} \frac{|a_i|}{|a_0|} = 0.537879, \qquad \frac{1}{1+\mu} = 0.650246$$

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,\ a_0 \neq 0, a_i \in C$$

Quindi le radici negative $\in$ [- 24.76 , - 0.650246], quelle positive $\in$ [0.650246 , 24.76]



b) polinomio di partenza:

$$P(x) = x\left(2x^3 + 14.1x^2 - 25.56x - 47.52\right) = x \cdot P_0(x)$$
$$p_0(x) = P_0(x) = 2x^3 + 14.1x^2 - 25.56x - 47.52$$

calcolo di $p_1(x)=-P_0'(x)$:

$p_1(x) = -6x^2 - 28.2x + 25.56$

Il resto della divisione $r_1(x) = \dfrac{p_0(x)}{p_1(x)}$ è

$r_1(x) = -39.13x - 27.498$

Raccogliendo in $r_1(x)$ la costante positiva del termine di grado massimo
$c_1 = 39.13$

si calcola $p_2(x) = -\dfrac{r_1(x)}{c_1}$

$p_2(x) = x + 0.702734$

Il resto della divisione $r_2(x) = \dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ è

$r_2(x) = 42.4141$

Raccogliendo in $r_2(x)$ la costante positiva
$c_2 = 42.4141$

calcolo di $p_3(x) = -\dfrac{r_2(x)}{c_2}$

$p_3(x) = -1$

Verifica del numero e del segno delle radici reali della successione di Sturm

$$\begin{array}{ccc} -\infty & 0 & +\infty \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & | & -1 & | & 1 \\ -1 & | & 1 & | & -1 \\ -1 & | & 1 & | & 1 \\ -1 & | & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Le radici reali negative sono: 2-0=2
Le radici reali positive sono: 3-2=1

3. Risolvere con il metodo di Gauss con Pivot Parziale il seguente sistema sottodeterminato:

$$\begin{cases} -4.5x_1 - 6.275x_2 - 3.22x_3 + 3.61x_4 + 3.94 = 0 \\ 5x_1 + 2.15x_2 + 5.72x_3 - 0.62x_4 + 13.8 = 0 \\ 4x_1 + 6.9x_2 + 3.12x_3 + 2.2x_4 - 0.88 = 0 \end{cases}$$

Soluzione:
matrice di partenza:

$$[A|b]= \begin{pmatrix} -4.5 & -6.275 & -3.22 & 3.61 & 3.94 \\ 5 & 2.15 & 5.72 & -0.62 & 13.8 \\ 4. & 6.9 & 3.12 & 2.2 & -0.88 \end{pmatrix}$$

si scambiano le righe 1 e 2:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2.15 & 5.72 & -0.624 & 13.8 \\ -4.5 & -6.275 & -3.22 & 3.61 & 3.94 \\ 4. & 6.9 & 3.12 & 2.2 & -0.88 \end{pmatrix}$$

si annullano i termini della prima sottocolonna della diagonale principale, ovvero $[A|b]_{(2,1)}$, $[A|b]_{(3,1)}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2.15 & 5.72 & -0.624 & 13.8 \\ 0. & -4.34 & 1.928 & 3.0484 & 16.36 \\ 0. & 5.18 & -1.456 & 2.6992 & -11.92 \end{pmatrix}$$

si scambiano le righe 2 e 3:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2.15 & 5.72 & -0.624 & 13.8 \\ 0. & 5.18 & -1.456 & 2.6992 & -11.92 \\ 0. & -4.34 & 1.928 & 3.0484 & 16.36 \end{pmatrix}$$

si annullano i termini della seconda sottocolonna della diagonale principale, ovvero $[A|b]_{(3,2)}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2.15 & 5.72 & -0.624 & 13.8 \\ 0. & 5.18 & -1.456 & 2.6992 & -11.92 \\ 0. & 0. & 0.708108 & 5.30989 & 6.37297 \end{pmatrix}$$

La variabile libera è x_4 , ponendo x_4= t e portando i termini con t al secondo membro (cambiando segno) si risolve il sistema per sostituzione all'indietro. Il nuovo sistema ammette la seguente soluzione:

x_1=-7.63429 + 9.83371 t
x_2= 0.228571 - 2.62882 t
x_3= 9 - 7.4987 t
x_4 = t

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata l'uguaglianza:

$$(5520)_6=(x)_4\cdot(30)_8$$

Soluzione:

$$x=(311)_4$$

i passi che portano al risultato sono riassunti di seguito:

si determina

$$(30)_8=(y)_{10}$$
$$y=24$$

$$(5520)_6=(z)_{10}$$
$$z=1272$$

si risolve rispetto alla variabile t l'equazione

$$(z)_{10}=(x)_{10}\,(y)_{10}$$

da cui si ricava

$$(x)_{10}=\frac{1272}{24}=53$$

Infine si determina x riportando x alla base desiderata:

53:4= 13, resto 1

13:4= 3, resto 1

3:4= 0, resto 3

pertanto

$$(x)_4=311$$