Università Politecnica delle Marche – Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica – Ing. delle Telecomunicazioni
Teledidattica

ANALISI NUMERICA – Primo Parziale – TEMA B
(Prof. A. M. Perdon)

Ancona, 26 maggio 2006

PARTE II - SOLUZIONE
Si chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Trovare la radice dell'equazione $\tan(x) - 4x^3 - 1 = 0$ contenuta nell'intervallo [-1.0, -0.4] con 6 decimali esatti, utilizzando uno dei seguenti schemi di punto fisso:

$$y = \arctan(4x^3 + 1) \qquad\qquad y = -\sqrt{\frac{\tan(x) - 1}{4x}})$$

Soluzione:

Si verifica la convergenza del primo schema $g_1(x) = \arctan(4x^3 + 1)$ nel punto medio x_0=-0.7 dell'intervallo:

$$|g_1'(x)| = 12 \cdot \left| \frac{x^2}{1 + (4x^3 + 1)^2} \right|$$

$$|g_1'(-0.7)| = 5.16522 > 1$$

Il primo schema diverge.

Si verifica la convergenza del secondo schema $g_2(x) = -\sqrt{\frac{\tan(x) - 1}{4x}}$ nel punto medio x_0=-0.7 dell'intervallo:

$$|g_2'(x)| = \frac{1}{4} \cdot \left| \frac{\frac{\sec^2(x)}{x} - \frac{\tan(x) - 1}{x^2}}{\sqrt{\frac{\tan(x) - 1}{x}}} \right|$$

$$|g_2'(-0.7)| = 0.203061 < 1$$

Il secondo schema converge.

Ponendo

$$y(x) = g_2(x) = -\sqrt{\frac{\tan(x) - 1}{4x}}$$

$$x_0 = -0.7$$

$$m = y'(x_0) = 0.203061$$

$$e_k \le \frac{m}{1 - m} |x_{k+1} - x_k|$$

Lo schema di punto fisso fornisce la seguente successione:

k	x_k	$e_k \le \frac{m}{1-m}\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	-0.811147	0.0283205
2	-0.795428	0.00400527
3	-0.796844	0.000360864
4	-0.796706	0.0000352357
5	-0.79672	3.41672×10^{-6}
6	-0.796718	3.31537×10^{-7}

Da cui si deduce che la radice cercata vale:

$$x \cong -0.796718$$

2. Risolvere, utilizzando la decomposizione triangolare, il sistema $Ax=b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 4.68 & -0.884 & 3.016 \\ 5.85 & 0.52 & 0.6 \\ 4.68 & 6.916 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 15.31 \\ 10.34 \\ 20.59 \end{bmatrix}$$

Scrivere tutti i passaggi.

Soluzione:
si utilizza la decomposizione LU risolvendo $A=L \cdot U$.

si scrive la matrice di partenza:

$$\begin{pmatrix} 4.68 & -0.884 & 3.016 \\ 5.85 & 0.52 & 0.6 \\ 4.68 & 6.916 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice L: $\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0.8 & 1. & 0. \\ 0.8 & -0.2 & 1. \end{pmatrix}$

Si calcola la matrice U: $\begin{pmatrix} 5.85 & 0.52 & 0.6 \\ 0 & 6.5 & -0.18 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$

Si calcola la matrice di permutazione P: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si calcola per sostituzione all'avanti il vettore y dall'equazione $Ly=Pb$:

Vettore y: $\begin{pmatrix} 10.34 \\ 12.318 \\ 9.5016 \end{pmatrix}$

Si calcola per sostituzione all'indietro il vettore x dall'equazione $Ux=y$:

Vettore x:

```
x1 → 1.19991
x2 → 2.00033
x3 → 3.80064
```

3. Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 8.0 & 4.0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 3.0 & 2.0 & 0 \\ 1.0 & 2.0 & 3.0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

Scrivere tutti i passaggi.

Soluzione:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2. & 0. & 0. & 0. \\ -4. & 0.25 & 0. & 0. \\ 5. & -0.375 & 0.5 & 0. \\ -1.8 & 0.125 & -0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

NOTA: la matrice è triangolare inferiore pertanto è sufficiente la sostituzione all'avanti del sistema $A \cdot x_i = e_i$, $i=1,\ldots,n$ dove i vettori e_i sono i vettori della base canonica (colonne della matrice identità di dimensione uguali ad A.

Facoltativo: Determinare x in modo che sia verificata la seguente uguaglianza:

$$(653.8125)_{10}=(x)_8$$

Soluzione:

$$(653.8125)_{10}==(x)_8$$
$$x=1215.64$$

si calcolano separatamente la parte intera e quella frazionaria del numero

si determina la parte intera $(653)_{10}==(y)_8$

653:8= 81, resto 5

81:8= 10, resto 1

10:8= 1, resto 2

1:8= 0, resto 1

la parte intera *è* $y=(1215)_8$

si determina la parte frazionaria $(0.8125)_{10}=(z)_8$

0.8125·8= 6.5 , parte intera 6, parte frazionaria 0.5

0.5·8= 4.0 , parte intera 4, parte frazionaria 0

la parte frazionaria *è* $z=64$

il numero decimale finale è

$$(y.z)_8=1215.64$$