Università Politecnica delle Marche – Facoltà di Ingegneria
Ing. Informatica e Automatica – Ing. delle Telecomunicazioni
Teledidattica

ANALISI NUMERICA – Primo Parziale – TEMA A
(Prof. A. M. Perdon)

Ancona, 26 maggio 2006

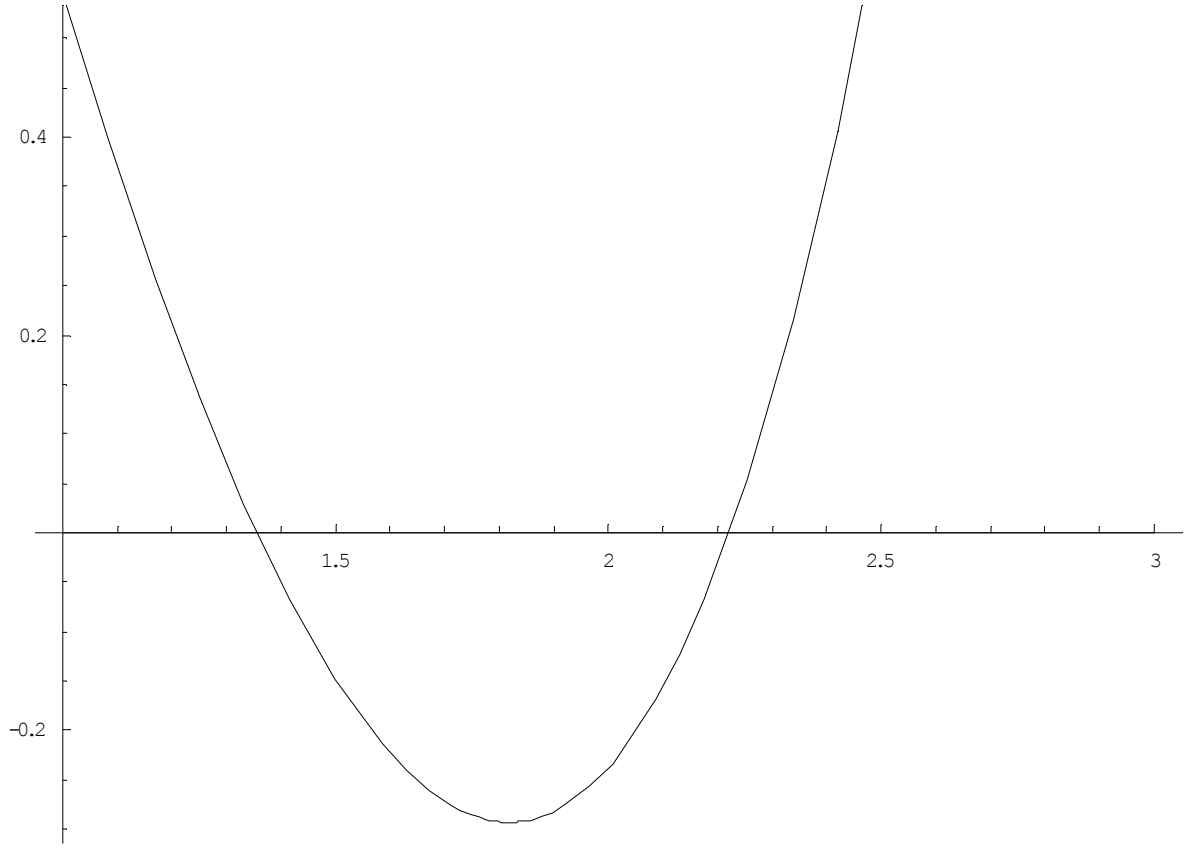
PARTE II - SOLUZIONE
SI chiede allo studente di risolvere i problemi seguenti e di dare la risposta più completa possibile.

1. Trovare le radici dell'equazione

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 3x + 2 = 0$$

con 4 decimali esatti, utilizzando il metodo di Newton-Raphson.

Soluzione:
la funzione presenta il seguente grafico:



L'analisi del grafico dell'equazione mostra la presenza di n. 2 radici reali distinte comprese nell'intervallo [0, 3]. Utilizziamo Newton-Raphson, con punti iniziali x_0=1.0 e x_0=2.5.

con punto iniziale x_0=1.0 e schema iterativo $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ stimiamo l'errore

calcolando $m = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)} \right|_{x=1.0} = 0.251665$, $\left. \frac{m}{1-m} \right|_{x=1.0} = 0.3363 \cong 0.34$

k	x_k	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$	$e_k \le \frac{m}{1-m} \lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	1.29761	0.297611	0.100087
2	1.35428	0.0566699	0.0190581
3	1.35697	0.00269319	0.000905721
4	1.35698	6.32×10^{-6}	2.12542×10^{-6}

$x \cong 1.3570$

con punto iniziale x_0=2.5 e schema iterativo $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ stimiamo l'errore

calcolando $m = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)} \right|_{x=2.5} = 0.416755$, $\left. \frac{m}{1-m} \right|_{x=2.5} = 0.714545 \cong 0.71$

k	x_k	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$	$e_k \le \frac{m}{1-m} \lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	2.29271	0.207294	0.148121
2	2.22786	0.0648438	0.0463338
3	2.22137	0.00649102	0.00463813
4	2.22131	0.0000634265	0.0000453211
5	2.22131	6.03147×10^{-9}	4.30976×10^{-9}

$x \cong 2.2213$

2. Risolvere con il metodo di Gauss con Pivot Parziale il sistema $Ax=b$, con

$$A = \begin{bmatrix} -5.76 & -6.75 & -1.02 \\ 6.4 & 1.3 & 1.1 \\ 5.12 & 7.7 & 3.24 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -29.772 \\ 12.050 \\ 28.744 \end{bmatrix}$$

Scrivere tutti i passaggi

Soluzione:
matrice aumentata di partenza:

[A|b]= $$\begin{pmatrix} -5.76 & -6.75 & -1.02 & -29.772 \\ 6.4 & 1.3 & 1.1 & 12.05 \\ 5.12 & 7.7 & 3.24 & 28.744 \end{pmatrix}$$

si scambiano le righe 1 e 2:

$$\begin{pmatrix} 6.4 & 1.3 & 1.1 & 12.05 \\ -5.76 & -6.75 & -1.02 & -29.772 \\ 5.12 & 7.7 & 3.24 & 28.744 \end{pmatrix}$$

si annullano i termini della prima sottocolonna della diagonale principale, ovvero $[A|b]_{(2,1)}$, $[A|b]_{(3,1)}$:

$$\begin{pmatrix} 6.4 & 1.3 & 1.1 & 12.05 \\ 8.88178\times10^{-16} & -5.58 & -0.03 & -18.927 \\ 0. & 6.66 & 2.36 & 19.104 \end{pmatrix}$$

si scambiano le righe 2 e 3:

$$\begin{pmatrix} 6.4 & 1.3 & 1.1 & 12.05 \\ 0. & 6.66 & 2.36 & 19.104 \\ 8.88178\times10^{-16} & -5.58 & -0.03 & -18.927 \end{pmatrix}$$

si annullano i termini della seconda sottocolonna della diagonale principale, ovvero $[A|b]_{(3,2)}$

$$\begin{pmatrix} 6.4 & 1.3 & 1.1 & 12.05 \\ 0. & 6.66 & 2.36 & 19.104 \\ 8.88178\times10^{-16} & 0. & 1.9473 & -2.92095 \end{pmatrix}$$

risolvendo per sostituzione all'indietro il nuovo sistema $Ax=b$ ammette la seguente soluzione:

x_1=1.45
x_2=3.4
x_3=-1.5

3. Costruire la successione di Sturm per il polinomio:

$$P(x) = x^4 + 4.85x^3 - 10.15x^2 - 11.15x - 15$$

Servirsene per determinare il numero ed il segno delle radici reali di *P(x)*.

Soluzione:
polinomio di partenza:
$p_0(x) = P(x) = x^4 + 4.85x^3 - 10.15x^2 - 11.15x - 15$

calcolo di $p_1(x)=-P'(x)$:
$p_1(x) = -4x^3 - 14.55x^2 + 20.3x - 11.55$

Il resto della divisione $r_1(x)=\dfrac{p_0(x)}{p_1(x)}$ è
$r_1(x) = -9.48547x^2 - 2.20906x + 11.6202$

Raccogliendo in $r_1(x)$ la costante positiva del termine di grado massimo
c_1= 9.48547

si calcola $p_2(x)= -\dfrac{r_1(x)}{c_1}$
$p_2(x) = x^2 + 0.232889x + 1.22505$

Il resto della divisione $r_2(x)= \dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ è
$r_2(x) = 28.3718x + 27.8332$

Raccogliendo in $r_2(x)$ la costante positiva del termine di grado massimo
c_2= 28.3718

si calcola di $p_3(x)= -\dfrac{r_2(x)}{c_2}$
$p_3(x) = -1x - 0.981019$

Il resto della divisione $r_3(x)= \dfrac{p_2(x)}{p_3(x)}$ è
$r_3(x) = 1.95898$

Raccogliendo in $r_3(x)$ la costante positiva
c_3= 1.95898

si calcola $p_4(x)= -\dfrac{r_3(x)}{c_3}$

$p_4(x) = -1$

Verifica del numero e del segno delle radici reali della successione di Sturm

$$\begin{array}{ccc} -\infty & 0 & +\infty \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & | & -1 & | & 1 \\ 1 & | & 1 & | & -1 \\ 1 & | & 1 & | & 1 \\ 1 & | & -1 & | & -1 \\ -1 & | & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Le radici reali negative sono: 2-1=1
Le radici reali positive sono: 3-2=1

Verifica supplementare (non richiesta):
La regione del piano di Gauss all'interno della quale si trovano le radici di *P(x)* è delimitata dalle equazioni di due circonferenze con centro nell'origine descritte dalla disuguaglianza

$$\frac{1}{1+\mu} \le |z| \le 1+\lambda$$

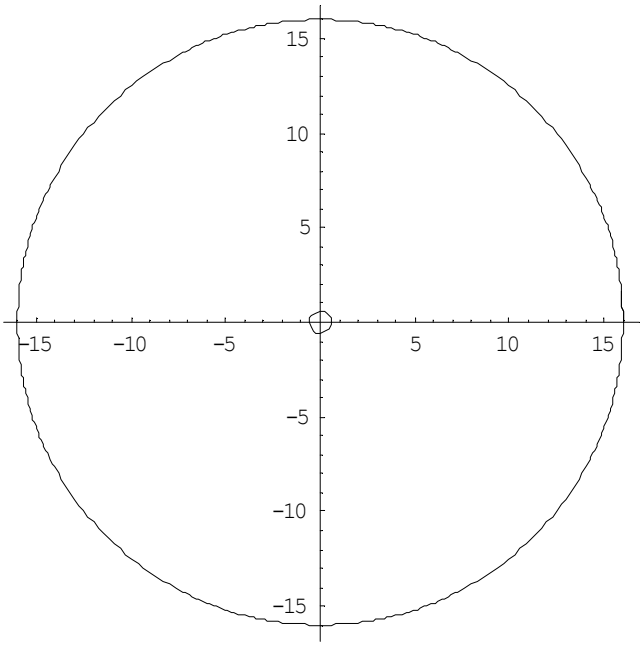
Dove

$$\lambda = \max_{i=1,..,n} \frac{|a_i|}{|a_0|} = 15, \qquad 1+\lambda = 16$$

$$\mu = \max_{i=0,..,n-1} \frac{|a_i|}{|a_0|} = 0.743333, \qquad \frac{1}{1+\mu} = 0.573614$$

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \; a_0 \ne 0, a_i \in C$$

Quindi le radici negative $\in$ [-16, -0.573614], quelle positive $\in$ [0.573614, 16]



Facoltativo: Scrivere in base 10 il numero rappresentato, in virgola mobile in base 16 su 32 bit con esponente ad eccesso 64, dalle seguenti 8 cifre esadecimali:

A4A4B6D8

Soluzione:

$$(A4A4B6D8)_{16}=(n)_{10}$$
$$n=1.23917\cdot 10^{-34}$$

le operazioni per ottenere il risultato sono di seguito esposte:

si determina il segno

$$(\mathrm{A4})_{16}=(x)_2$$
$$x=10100100$$

la prima cifra di x è 1 quindi il segno è negativo

le restanti cifre di x 0100100 trasformate in base 10 è

$$(0100100)_2=(y)_{10}$$
$$y=36$$

si determina l'esponente ad eccesso 64 del numero esadecimale

$$z=36-64= -28$$

si determina la mantissa del numero esadecimale

$$-(0.\mathrm{A4B6D8})_{16}=(t)_{10}$$
$$t=-0.643415$$

si determina il numero decimale finale

$$n = t*16^z= -0.643415\cdot 16^{-28}=-1.23917\cdot 10^{-34}$$