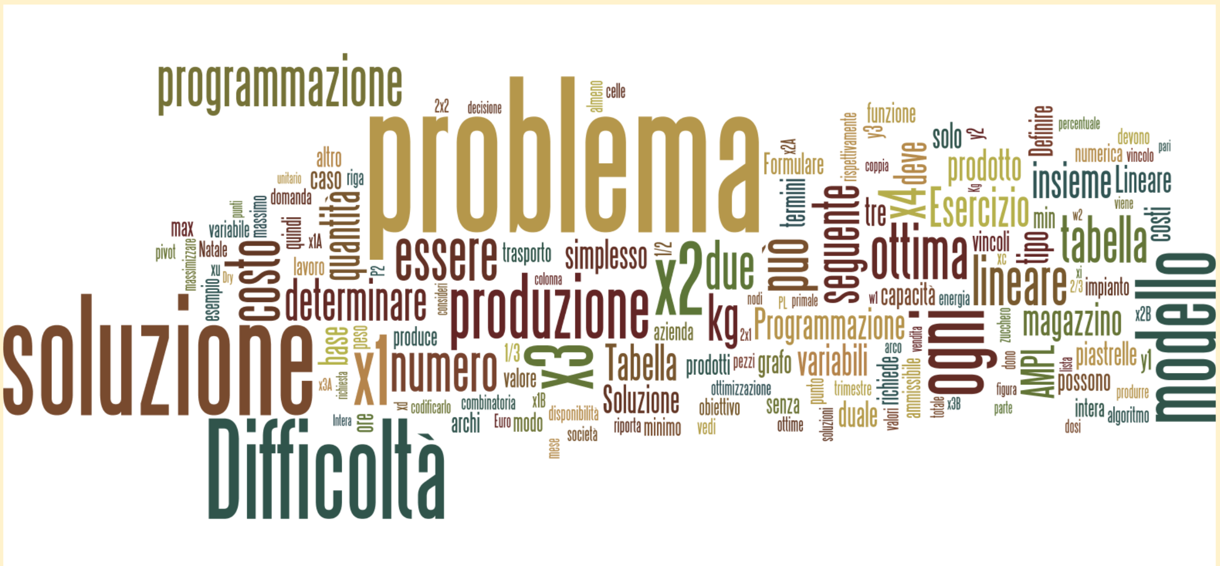
Esercizi di
Programmazione Matematica

a cura di
Fabrizio Marinelli



ver 2.0 - 2020/2021

Introduzione

La raccolta comprende circa un centinaio di esercizi ripartiti sistematicamente in sette sezioni che abbracciano gli argomenti dei corsi del settore scientifico disciplinare MAT/09 (Ricerca Operativa) erogati presso l'Università Politecnica delle Marche. Un'attenzione particolare è stata data alla modellazione matematica allo scopo di sviluppare le abilità dello studente in questa pratica difficilmente codificabile.

In base alla mia esperienza personale, la mole di esercizi proposti, se propriamente svolti, consente di ottenere una preparazione adeguata alle prove d'esame. La soluzione di alcuni esercizi è riportata nella seconda parte della dispensa. Gli esercizi senza soluzione sono proposti allo scopo di stimolare nello studente un approccio attivo alla materia. Eventuali dubbi, tuttavia, potranno essere fugati contattandomi all'indirizzo fabrizio.marinelli@staff.univpm.it.

Ho indicato il grado di difficoltà di ogni esercizio utilizzando un numero di stelline che varia da 1 a 5. Evidentemente la valutazione è soggettiva e potrebbe non coincidere con la difficoltà sperimentata dallo studente. Un feedback su questo aspetto sarebbe decisamente gradito.

Le sezioni della raccolta includono problemi di modellazione in termini di Programmazione Lineare e Programmazione Lineare Intera (Sez. 1 e 2); applicazione degli algoritmi per la Programmazione Lineare, dei risultati della teoria della programmazione lineare (Sez. 3) e della teoria della dualità (Sez. 4); problemi di ottimizzazione combinatoria e di teoria dei grafi (Sez, 5); problemi di ottimizzazione su reti e applicazione dei relativi algoritmi (Sez. 6) e infine esercizi relativi agli algoritmi esatti e euristici per la programmazione intera (Sez. 7).
Gli esercizi nelle sezioni 1, 3 e 4 sono particolarmente rivolti agli studenti del corso di **Ricerca Operativa**. Gli esercizi nelle sezioni 2, 5, 6 e 7 invece riguardano argomenti trattati nei corsi di **Ricerca Operativa II** e **Modelli e metodi per il Supporto alle Decisioni**.

Ringraziamenti e disclaimer

La raccolta comprende sia problemi originali sia varianti o versioni integrali di problemi e esercizi tratti da varie fonti disponibili sul web e curate da colleghi professori di Ricerca Operativa. Avendo colpevolmente perso le tracce dei riferimenti puntuali, spero sia sufficiente un ringraziamento collettivo e l'impegno a rimuovere i contenuti dei quali venga reclamata la proprietà intellettuale. Ringrazio anche gli studenti che mi hanno segnalato in questi anni errori e sviste. Gli eventuali errori tuttora presenti sono tutti miei.

Fabrizio Marinelli

Sommario

1. Modelli di Programmazione Lineare

Gli esercizi proposti in questa sezione riguardano la modellazione di problemi decisionali in termini di programmazione lineare. In genere è richiesta la sola definizione di un modello parametrico in termini di variabili decisionali, vincoli lineari e funzione obiettivo, ed eventualmente la sua codifica in un linguaggio di modellazione algebrica (per esempio AMPL); se non espressamente richiesto, non è necessario determinare una soluzione numerica. La maggior parte dei modelli soluzione sono varianti dei modelli classici della Programmazione Lineare; in alcuni casi, la variante richiede l'uso di variabili intere e/o binarie.

1.1 Il salvadanaio del nonno

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Il nonno dispone di 20.000 € che decide di investire in borsa su due titoli A e B che mediamente rendono rispettivamente il 15% e il 25%. Per non correre troppi rischi il nonno decide di investire almeno un quarto del budget sul titolo A e non più del doppio di quanto investito su A sul titolo B.

- Definire un modello di programmazione lineare che stabilisca quanto investire su A e B al fine di massimizzare il rendimento.
- Analizzando graficamente il poliedro
    - cosa succede se l'investimento può essere fatto solo in multipli di 5.000 € ?
    - Cosa si può dire se i due titoli hanno lo stesso rendimento?
    - Cosa succede se si riduce il limite della quota investita sul titolo A? E se si aumenta?

1.2 Il salvadanaio del nonno (variante)

Difficoltà: ★★★☆☆

Si consideri più realisticamente un orizzonte temporale di 6 anni e si supponga di investire nei seguenti titoli obbligazionari:

- BOT a scadenza biennale con rendimento del 2% (titolo A).
- BOT a scadenza annuale con rendimento dell' 1% (titolo B).
- Obbligazioni triennali di una azienda con rendimento del 6% che l'azienda emetterà solo a partire dal secondo anno (titolo C)

Data una disponibilità iniziale di 20.000 €, definire un modello di programmazione lineare che stabilisca il piano di investimento ottimale, ossia quello che massimizza il capitale posseduto all'inizio del settimo anno.

1.3 Un problema di mix-produttivo

Difficoltà: ★★☆☆☆

Un'azienda produce tre differenti fragranze di acqua di colonia: *fragranza alla rosa*, *fragranza alla viola* e *fragranza al mughetto*. Ogni litro di fragranza richiede due elementi di base, aghi di pino e foglie di eucalipto, nelle quantità riportate in tabella.

	Rosa	Viola	Mughetto	Disponibilità
aghi di pino	12 kg	6 kg	3 kg	48 kg
foglie di eucalipto	4 kg	4 kg	8 kg	32 kg
Guadagno / litro	200 €	180 €	220 €	

La tabella riporta anche le disponibilità di magazzino degli elementi di base e il guadagno per litro delle fragranze. <u>La migliore strategia di gestione del magazzino impone il totale utilizzo delle scorte di foglie di eucalipto.</u>

Tenendo conto che la domanda complessiva di acqua di colonia è al più pari a 6 litri, determinare un modello di programmazione lineare che indichi i livelli di produzione delle singole fragranze allo scopo di massimizzare il guadagno complessivo dell'azienda.

1.4 Un altro problema di mix-produttivo

Difficoltà: ★★☆☆☆

Una compagnia produce e vende i prodotti A e B.

- La domanda di entrambi i prodotti è illimitata.
- Una unità di prodotto A (B) richiede 3 (4) ore-macchina.
- La macchina è disponibile per 20.000 ore.
- Il costo unitario di produzione di A (B) è pari a 3 € (2 €).
- Il prezzo unitario di vendita di A (B) è di 6 € (5.40 €).
- All'inizio del corrente periodo sono disponibili 45.000 Euro.
- Il 45% (30%) dei ricavi delle vendite di A (B) nel periodo precedente (per esempio nel mese precedente) sono disponibili per le spese del periodo (mese) corrente.

Definire un modello di programmazione lineare per la determinazione dei livelli di produzione che massimizzino i ricavi.

1.5 Un problema di miscelazione

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Un'azienda farmaceutica utilizza quattro tipi di composti chimici per ottenere un medicinale. Ciascun composto ha un diverso contenuto di sodio, olio vegetale e magnesio. La tabella che segue riporta la composizione di ciascun composto (espresso in percentuale sul peso totale), insieme al costo unitario.

	% sodio	% olio veg.	% magnesio	Costo al mg
Composto 1	3	4	6	20 €
Composto 2	5	4	5	10 €
Composto 3	1	2	4	20 €

Il medicinale deve avere un contenuto percentuale di sodio di almeno il 3%; un contenuto di olio vegetale non superiore al 4%; un contenuto di magnesio non superiore al 5%.
Formulare un modello di programmazione lineare che determini la pianificazione della produzione ottimale, ossia quella che minimizza i costi.

1.6 L'erba del vicino

Difficoltà: ★★☆☆☆

La società *Merlin* produce i concimi *prato starter* (tipo A) e *prato estate* (tipo B) che vende rispettivamente a 25 e 28 €/Kg. La composizione dei singoli concimi e le disponibilità in magazzino sono riportate nella tabella seguente:

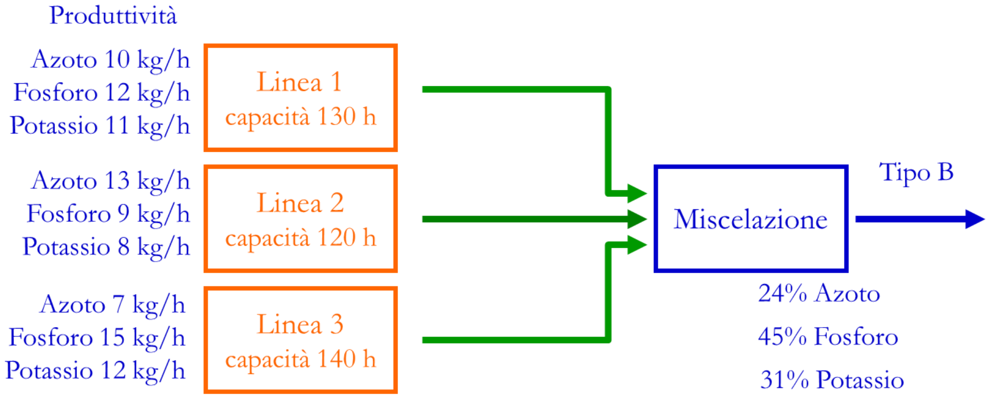
	q.tà in kg per kg			
	Azoto	Fosforo	Potassio	Magnesio
Tipo A	0.40	0.40	0.10	0.10
Tipo B	0.24	0.45	0.31	0.00
Disponibilità (kg)	312	360	160	70

1. Definire un modello di programmazione lineare per determinare la quantità in Kg di tipo A e B che deve essere prodotta (ipotizzando una domanda illimitata) per massimizzare il ricavo dal magazzino esistente.
2. La miscelazione di un kg di concime richiede 4 min. per il *prato starter* (tipo A) e 6 min. per il *prato estate* (tipo B). Inoltre, il reparto vendite impone una produzione giornaliera minima di 20 kg di *prato starter* e 25 kg di *prato estate*. Definire un modello di programmazione lineare la cui soluzione indichi il massimo ricavo ottenibile in 10 giorni (si consideri una giornata lavorativa di 8 ore).

1.7 L'erba del vicino (variante)

Difficoltà: ★★★☆☆

La società *Merlin* decide di installare 3 linee di trattamento per le sostanze necessarie per il concime di tipo B. Ogni linea ha una data capacità produttiva settimanale (espressa in ore) e una data produttività per sostanza (espressa in kg/ora), vedi diagramma.



Definire un modello di programmazione lineare che determini la massima quantità di concime di tipo B che può essere prodotta in una settimana dalle linee di trattamento.

1.8 Un problema di semina

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Un agricoltore dispone di 20 ettari di terreno e 120 ton. di concime; potrebbe utilizzare il terreno per una discarica abusiva e invece decide di coltivarlo, dato che in cascina ha 65 kg di semi di pomodoro e 55 kg di semi di melanzane.
L'agricoltore sa che per coltivare un ettaro di pomodori gli servono 8 kg di semi e 12 ton. di concime, mentre per un ettaro di melanzane gli servono 6 kg di semi e 14 ton. di concime. Inoltre, un ettaro di pomodori gli rende 2400 € mentre un ettaro di melanzane gli rende 2600 €.
Definire un modello di programmazione lineare che indichi gli ettari che devono essere coltivati a pomodori e quelli da adibire a coltivazione di melanzane allo scopo di massimizzare il guadagno del contadino.

1.9 Un problema di trasporto

Difficoltà: ★★☆☆☆

Una società di trasporto deve effettuare una spedizione di 3.000 ton. di materiale industriale in una località a 1.000 Km di distanza. La società dispone di 150 automezzi da 15 ton. (tipo A) e di 100 automezzi da 10 ton. (tipo B).
I mezzi di tipo A e B costano 30 e 40 cent. per ton. per km. Allo scopo di soddisfare ordini futuri, per ogni mezzo di tipo A che rimane fermo devono rimanere fermi 2 mezzi di tipo B.
Definire un modello di programmazione lineare che determini il costo totale minimo di spedizione.

1.10 Gasolio trasportato, gasolio consumato

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Una società petrolifera dispone di due depositi (A e B) e tre punti di distribuzione. La seguente tabella indica la disponibilità giornaliera di gasolio dei depositi (in litri), la richiesta giornaliera dei punti di distribuzione (in litri) e il costo di trasporto (in €cent/litro) tra depositi e punti di distribuzione.

		Punti di distribuzione		
	disponibilità	Milano	Roma	Napoli
deposito A	1000	13	11	16
deposito B	1400	12	15	14
	richiesta	800	700	900

1. Volendo soddisfare tutta la richiesta minimizzando i costi di trasporto, definire un modello di programmazione lineare che stabilisca i litri di gasolio che devono essere trasportati da ogni deposito a ogni centro di distribuzione.
2. Come modificare il modello del punto precedente se le richieste devono essere soddisfatte esattamente e se i depositi devono essere completamente svuotati?

3. Sotto le condizioni del punto 2., cosa si può dire sulle soluzioni del modello se la disponibilità del deposito A passa da 1000 a 1200 litri?

1.11 Rerouting di container

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Una ditta di trasporto deve trasferire container vuoti da 6 Magazzini, situati a Verona, Perugia, Roma, Pescara, Taranto e Lamezia, ai principali Porti nazionali (Genova, Venezia, Ancona, Napoli, Bari).
Trasportare i container dai magazzini ai porti costa. Il costo di trasporto di ciascun container è proporzionale alla distanza percorsa dal camion che lo trasporta. Il costo di trasporto chilometrico per ogni container è di 30 cent. di euro per km. Le disponibilità di container vuoti ai Magazzini, le richieste ai Porti e le distanze fra Magazzini e Porti (in km) sono riportate nella seguente tabella

	Genova	Venezia	Ancona	Napoli	Bari	Container vuoti
Verona	290	115	355	715	810	10
Perugia	380	340	165	380	610	12
Roma	505	530	285	220	450	20
Pescara	655	450	155	240	315	24
Taranto	1010	840	550	305	95	18
Lamezia	1072	1097	747	372	333	40
Richieste	20	15	25	33	21	

Definire un modello di Programmazione lineare (intera?) che minimizzi il costo totale di rerouting, codificarlo in AMPL e risolvere l'istanza riportata in tabella.

1.12 Un problema di trasporto (2)

Difficoltà: ★☆☆☆☆

La Brambilla S.p.A. ha necessità di approvvigionarsi di farina, per soddisfare la domanda dei suoi 9 stabilimenti italiani. I fornitori di farina sono i 5 mulini di proprietà Brambilla sul territorio nazionale e l'approvvigionamento dal mercato internazionale. La società, per policy aziendale (Rapporto di Sostenibilità), intende minimizzare il consumo complessivo di CO_2 derivante dal trasporto della farina. Per ogni coppia origine – destinazione, la tabella seguente riporta il consumo di CO_2 per tonnellata di farina trasportata.

	Parma	Galliate	Ferrara	Castelplanio	Altamura	Estero	Domanda (ton)
Parma	0,5	17	14	33	80	1000	200
Foggia	65	81	51	38	17	1000	150
Ascoli Piceno	42	59	37	16	41	1000	50
Marcianese	51	67	45	24	29	1000	50
Castiglione	8	17	15	40	85	1000	75
Melfi	71	87	65	44	10	1000	100
Rubbiano	10	10	23	41	86	1000	75
Novara	18	1	31	49	94	1000	100
Cremona	7	15	20	38	83	1000	75
Offerta (ton)	150	125	125	100	150	1000	850

Definire un modello parametrico di programmazione lineare che permetta di raggiungere questo obiettivo. Codificare il modello in AMPL e risolvere il caso riportato in tabella.

1.13 Miscelazione di benzine

Difficoltà: ★★☆☆☆

Una raffineria produce due tipi A e B di benzina mescolando tre prodotti base (con disponibilità e costi riportati in Tabella 1) e rispettando le regole di composizione riportate in Tabella 2. Considerando che il ricavo è di 5.5 Euro per barile di tipo A e di 4.5 Euro per barile di tipo B, formulare un modello di PL che massimizzi il guadagno netto complessivo (differenza fra ricavi e costi).

Prodotto	Disponibilità (barili)	Costo (barile)
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4

Tabella 1

	Prodotto 1	Prodotto 2	Prodotto 3
Benzina A	$\leq$ 30%	$\geq$ 40%	-
Benzina B	$\leq$ 50%	$\geq$ 10%	-

Tabella 2

Soluzione (8.1)

1.14 Il cocktail ideale

Difficoltà: ★★★☆☆

Un cocktail ideale richiede, tra gli altri ingredienti, 12 dosi di bitter, 35 di Martini Rosso e 45 di Dry Gin. Purtroppo disponete solo di 25 dosi di Dry Gin, però avete altri cocktail già pronti (30 dosi di Negroni e 32 di Martini Dry Rosso) che contengono Martini, Bitter e Gin nelle seguenti proporzioni:

- Negroni = 1/3 Martini Rosso + 1/3 Bitter + 1/3 Dry Gin
- Martini Dry Rosso = 2/3 Dry Gin + 1/3 Martini rosso

Inoltre trovate anche 6 bottigliette di un altro prodotto dal nome impronunciabile e, dai vostri calcoli, risulta che 1 bottiglietta contiene 1,5 dosi di Bitter, 2 di Martini Rosso ed 1 di Dry Gin.
Come si possono miscelare i prodotti a disposizione al fine di ottenere il cocktail che più somiglia a quello ideale?

Soluzione (8.2)

1.15 Un problema di produzione (1)

Difficoltà: ★★★☆☆

Uno stabilimento manifatturiero produce 3 tipologie di componenti (A, B e C) che in parte sono utilizzati nell'ambito dello stesso impianto e in parte sono spediti a un altro centro di produzione della stessa catena logistica. La produzione di un componente A richiede un'ora di lavoro. La produzione di un componente B richiede due ore di lavoro e due componenti di tipo A. La produzione di un componente C richiede tre ore di lavoro e un componente di tipo B. Lo stabilimento è un collo di bottiglia della catena logistica quindi non ha limiti sulle quantità prodotte. Inoltre, i prezzi unitari di scambio con l'altro centro di produzione sono di 8 euro, 70 euro e 100 euro rispettivamente per i componenti A, B e C.
Infine, la capacità lavorativa settimanale è di 40 ore.

1. Definire un modello di programmazione lineare la cui soluzione indichi il ricavo massimo ottenibile in una settimana di lavoro.
2. Codificare il modello in AMPL e determinare una soluzione numerica.
3. Di quanto aumenta il profitto se si aggiunge un'ora di lavoro (straordinario)?

4. Cosa succede se il prezzo di vendita del componente A cresce di 20 euro?

1.16 Un problema di produzione (2)

Difficoltà: ★★★☆☆

Un impianto chimico produce quattro tipi di colla (A, B, C e D) utilizzando 3 materie prime (P1, P2 e P3). La produzione della colla D, a differenza delle altre, richiede anche l'impiego delle colle A e B. La produzione di un kg di colla richiede alcune sostanze chimiche non specificate e le quantità di materie prime (e di altre colle) riportate in Tabella 1 e espresse in kg.

Colla	P1	P2	P3	A	B
A	0.2	0.4	0.3	-	-
B	0.4	0.1	0.2	-	-
C	0.2	0.5	0.1	-	-
D	0.1	0.1	0.2	0.1	0.3

Tabella 1

Il magazzino dispone di 1000, 1500 e 750 Kg di rispettivamente P1, P2 e P3. Inoltre, i profitti di vendita (in Euro per kg di prodotto) per ogni tipo di colla sono 2, 2.5, 2.5 e 3 per rispettivamente le colle A, B, C e D. Sotto l'ipotesi che la quantità di colla D prodotta non possa superare i 500kg,

1. formulare un modello di Programmazione Lineare per la determinazione del profitto massimo;
2. codificare il modello del punto 1. in AMPL e determinare una soluzione numerica.

1.17 Assemblaggio di computer

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Un'azienda produce computer portatili utilizzando (tra le altre cose) dei componenti la disponibilità dei quali è limitata dai quantitativi presenti in magazzino, vedi Tabella 1.

1. Definire un modello di programmazione matematica la cui soluzione ottima indichi quanti e quali computer produrre per massimizzare il profitto.
2. Codificare il modello in AMPL e determinare una soluzione numerica.

Componente	Scorta	Modello 1	Modello 2	Modello 3
GPU	450	0	1	0
Banco RAM	250	1	1	1
Altoparlante	800	1	2	0
Videocamera	450	1	2	2
	Profitti unitari	250	300	275

Tabella 1

1.18 Un problema in pasticceria

Difficoltà: ★★☆☆☆

Una pasticceria artigianale produce tre tipi di torte (A, B e C) utilizzando farina, uova, latte, zucchero e panna. In particolare, la panna, che può essere venduta anche separatamente, è prodotta con latte e zucchero dalla pasticceria stessa. La Tabella 1 riporta le disponibilità (in kg) di magazzino degli ingredienti, le quantità (in Kg) di ingredienti necessarie per realizzare ogni tipo di torta, il numero di torte ordinate e il prezzo di vendita unitario.

Torta	farina	uova	latte	zucchero	panna	Ordini	Prezzo (€)
A	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1	20	7
B	0.4	0.2	0.1	0.1	0.2	15	5
C	0.5	0.2	0.2	0.1	-	10	8
Disponibilità	12	18	22	18			

Tabella 1

La produzione di un Kg di panna richiede 700 g di latte e 300 g di zucchero. Oltre alle torte, la pasticceria ha anche un ordine di 25 Kg di panna che vende a 3 €/kg. Da un rapido calcolo risulta che il magazzino non è sufficiente per evadere tutti gli ordini.

1. Supponendo che il costo per kg di farina, uova, latte e zucchero sia rispettivamente di 1, 5, 1.2 e 0.7 €, qual è la spesa minima che occorre fare per evadere tutti gli ordini? Definire un modello di Programmazione Lineare (Intera) che risponda al quesito, codificarlo con AMPL e determinare una soluzione numerica.

1.19 Anonima chimica

Difficoltà: ★★☆☆☆

Un'industria chimica produce tre composti P1, P2 e P3. La produzione dei composti P1 e P2 richiede due sostanze chimiche C1 e C2, mentre il composto P3 si ottiene utilizzando la sostanza chimica C1 e il composto P2. La Tabella 1 riporta le quantità (in quintali) delle due sostanze C1 e C2 necessarie per la produzione di un quintale dei composti P1 e P2, e le quantità di sostanza C1 e composto P2 necessarie per produrre un quintale di P3.

	C1	C2	P2
P1	0.7	0.3	-
P2	0.2	0.8	-
P3	0.4	-	0.6

Tabella 1

Gli ordini prevedono la produzione di almeno 500, 1000 e 1500 quintali di P1, P2 e P3 rispettivamente. I composti P1, P2 e P3 sono venduti a 70, 60 e 85 euro al quintale, mentre il magazzino dispone di 1500 quintali di sostanza C1 e 3000 quintali di sostanza C2.
Definire un modello di Programmazione Lineare che garantisca il soddisfacimento degli ordini e massimizzi il profitto che si può ottenere con il magazzino disponibile.

1.20 Mi fonde il cervello

Difficoltà: ★★☆☆☆

Una fonderia produce una lega ottenuta dalla fusione di 4 diversi materiali grezzi. La Tabella 1 riporta la composizione di ciascun materiale, espressa in percentuale per kg di materiale, e il costo unitario (Euro/kg):

	% alluminio	% silicio	% carbonio	Costo al Kg
Materiale 1	3	4	6	680
Materiale 2	5	4	5	750
Materiale 3	1	2.5	4	450
Materiale 4	4	5	7	870

Tabella 1

La lega deve contenere una percentuale di alluminio compresa tra il 3% e l'8%, una percentuale di silicio compresa tra il 4% e l'5%, e una percentuale di carbonio non superiore al 5%.
Formulare un modello di Programmazione Lineare per la pianificazione di costo minimo, codificarlo in AMPL e determinare una soluzione numerica.

Soluzione (8.3)

1.21 Alta tensione

Difficoltà: ★★★☆☆

L'azienda elettrica regionale abruzzese si rifornisce da due centrali C1 e C2 capaci di produrre rispettivamente 130 e 310 MW al giorno. La Tabella 1 riporta i costi di trasporto in Euro/KW della corrente elettrica da una centrale ad ognuna delle città AQ, PE e CH e la richiesta giornaliera di energia di ogni provincia (in MW).

	AQ	PE	CH

C1	10	15	20
C2	8	14	7
richiesta	150	80	210

Tabella 1

1. formulare un modello di Programmazione Lineare per la minimizzazione dei costi di trasporto dell'energia ai tre centri abitati.
2. Codificare il modello in AMPL e determinare la soluzione nel caso in cui la linea elettrica che collega a Chieti la Centrale 2 abbia una capacità massima di 100 MW.
3. Supponiamo che le quantità di energia da inviare siano vincolate ad assumere valori interi. Come andrebbe in questo caso modificata la formulazione? Motivare la risposta.
4. Come si modifica la formulazione nel caso in cui vi siano n tipi distinti di flussi continui ma non miscelabili, supponendo che il generico tratto dall'origine i alla destinazione j abbia capacità c_{ij}?
5. Verificare le risposte dei punti 3. e 4. risolvendo il modello con AMPL.

1.22 La donna è mobile

Difficoltà: ★★☆☆☆

Un mobilificio produce due tipi di scaffali A e B. Ogni scaffale richiede una certa quantità di legno, un certo numero di viti e bulloni (sempre usati a coppie), e un certo numero di ore di manodopera, vedi Tabella 1. Tutti i tipi di scafali possono anche essere incollati, e quindi realizzati senza viti e bulloni, tuttavia questa scelta produce un prodotto di minore qualità, venduto quindi a un prezzo inferiore, vedi ultime due colonne della Tabella 1.

	Legno (kg)	Viti/bulloni	Manodopera (ore)	Euro × scaffale avvitato	Euro × scaffale incollato
A	2	4	1.5	250	150
B	1.5	7	3	200	120
Disponibilità	100	500	300		

Tabella 1

Formulare un modello di Programmazione Lineare Intera che determini il piano di produzione ottimo (quello di massimo profitto), codificarlo in AMPL e determinare una soluzione numerica.

1.23 Come ti scarto lo scarto

Difficoltà: ★★☆☆☆

In un laboratorio di ricerca si stanno studiando alcune soluzioni per eliminare gli scarti tossici di un composto Z utilizzato per esperimenti nucleari. Il composto Z è ottenuta miscelando due diversi componenti, A e B, il cui contenuto percentuale di nichel, cadmio e manganese è riportato nella Tabella 1. La tabella riporta anche i costi per tonnellata di ogni componente.

	A	B
Nichel	5%	8%
Cadmio	2%	3%
Manganese	1%	2%
Costo (M€ per tonnellata)	3	4

Tabella 1

A seguito di uno studio condotto dai ricercatori, si ha che i termini di legge sui rifiuti tossici sono soddisfatti se in una tonnellata di composto Z è presente una percentuale di nichel compresa fra il 7% e l'11%, una percentuale di cadmio tra 2% e 5% e infine una percentuale di manganese tra 1,5% e 2%.

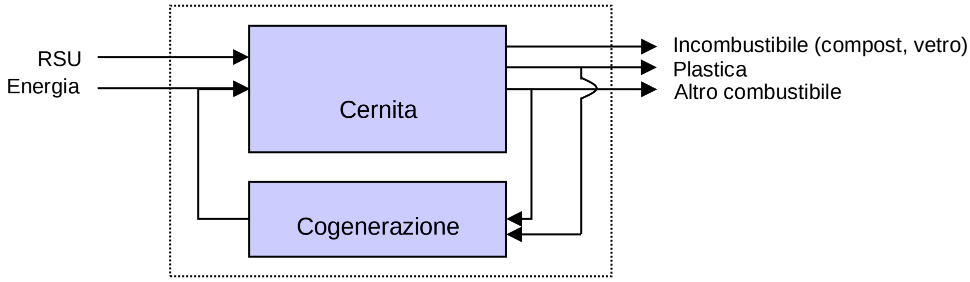
1. Formulare un modello di Programmazione Lineare la cui soluzione ottima indichi le quantità di componenti A e B necessarie per produrre una tonnellata di composto Z a minor costo nel rispetto dei requisiti di legge.

2. Portare il problema in forma standard e indicare la base ottima corrispondente alla soluzione ottima **x** = (1/3, 2/3).

1.24 Puliamo il mondo

Difficoltà: ★★★☆☆

La figura rappresenta schematicamente il diagramma ingresso-uscita di un impianto per il trattamento di rifiuti solidi urbani (RSU). Le risorse sono rappresentate da RSU ed energia, il prodotto da materiale incombustibile (compost, utilizzabile come fertilizzante, e vetro) e combustibile (tra cui certe materie plastiche).



Il materiale incombustibile rappresenta il 20% in peso della quantità di RSU disponibile. Il rimanente 80% è formato da un 30% di plastica e un 50% di altro combustibile. La plastica può essere venduta a 240€ la tonnellata, oppure utilizzata come combustibile nel sistema di cogenerazione per produrre energia da utilizzare nell'impianto. Anche il materiale combustibile diverso dalla plastica può essere venduto all'esterno al prezzo di 170€ la tonnellata oppure utilizzato internamente dal sistema di cogenerazione. Quest'ultimo fornisce energia con le seguenti rese: 2,4 MWh (Megawatt ora) per ogni tonnellata di plastica bruciata, e 1,6 MWh per ogni tonnellata di altro combustibile.
Ogni giorno (= 12 ore) l'impianto tratta 600 tonnellate di RSU assorbendo una potenza di 40 MW. Tenendo conto che un MWh può essere acquistato esternamente a 210€, quante tonnellate di plastica e di altro combustibile è opportuno utilizzare per la cogenerazione se si vogliono massimizzare i profitti dell'impianto al netto dei costi di funzionamento? Si formuli il problema come programmazione lineare indicando con

e la quantità di energia da acquistare (MWh);
p la quantità di plastica da destinare alla cogenerazione (tonnellate);
c la quantità di altro combustibile da destinare alla cogenerazione (tonnellate).

Soluzione (8.4)

2. Modelli avanzati di Programmazione Lineare

Gli esercizi proposti in questa sezione in generale richiedono l'applicazione di tecniche di modellazione con variabili intere e/o binarie. Se non diversamente specificato, è richiesta la definizione di un modello parametrico in termini di variabili decisionali intere e/o binarie, vincoli lineari e funzione obiettivo, ed eventualmente la sua codifica in un linguaggio di modellazione algebrica (per esempio AMPL).
Molti dei modelli soluzione sono varianti dei modelli classici di ottimizzazione combinatoria e ottimizzazione su reti illustrati nei corsi di Ricerca Operativa e Ricerca Operativa II.

2.1 Con l'acqua alla gola

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Una squadra di nuoto composta da 4 atleti (Andrea, Bruno, Claudio, Davide) deve partecipare alla gara dei 4×100 misti. Considerando i tempi riportati in tabella dei singoli atleti per le singole specialità, come devono essere assegnate le specialità in modo da garantire la migliore performance?

	Tempi (sec.)			
	Dorso	Rana	Farfalla	Libero
Andrea	65	73	63	57
Bruno	67	70	65	58
Claudio	68	72	69	55
Davide	67	75	70	59

1. Formulare il problema con un modello di programmazione lineare intera, codificarlo in AMPL e determinare una soluzione numerica.
2. Quale errore si commette adottando le soluzioni ottenute scegliendo il miglior nuotatore (tra quelli non ancora utilizzati) per specialità, oppure la miglior specialità (tra quelle non ancora assegnate) per nuotatore?
3. Quali modifiche occorre apportare al modello se la squadra è composta da 8 nuotatori?

2.2 Precario conviene

Difficoltà: ★★★☆☆

La *Forever-Spring* produce articoli fortemente stagionali (cioè articoli che hanno una richiesta molto variabile durante l'anno) e di conseguenza necessita di una forza lavoro altrettanto variabile, vedi tabella.

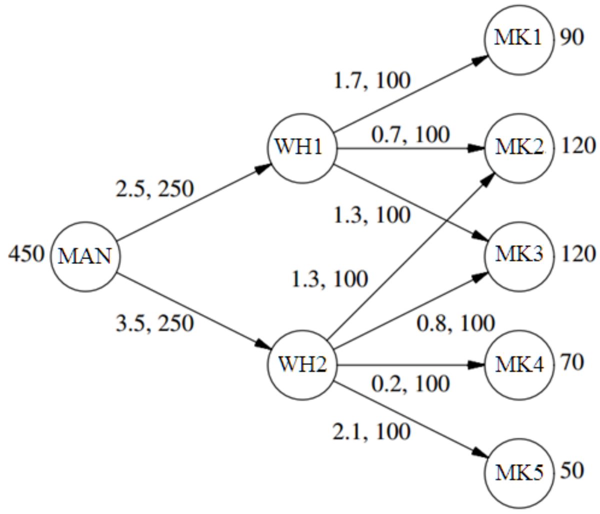
mese	gen	feb	mar	apr	mag	giu	lug	ago	set	ott	nov	dic
dipendenti	12	14	16	13	12	18	20	21	15	17	18	15

La società non vuole assumere a tempo indeterminato, ma per motivi sindacali può solo assumere con contratti a tempo determinato di 8 mesi.
1. Formulare in termini di programmazione lineare intera il problema di determinare il minimo numero di contratti che la società deve stipulare per avere a regime (cioè in ogni mese degli anni successivi al primo) un numero di dipendenti sufficiente.
2. La società si mette una mano sulla coscienza … ma non in tasca: ipotizzando un costo mensile lordo di 2000 € per dipendente, definire un modello di PLI che risponde alla seguente domanda: "è possibile assumere a tempo indeterminato senza aumentare il costo totale della forza lavoro?" e codificarlo in AMPL.
3. Se la risposta alla domanda precedente è "sì", qual è il numero massimo di dipendenti *fortunati*?

2.3 Un problema di logistica

Difficoltà: ★★★☆☆

La LTO S.p.A. deve ottimizzare la sua rete distributiva, minimizzando i costi logistici di trasporto dei prodotti dal polo produttivo (MAN), passando per i magazzini (WH1; WH2), fino ai mercati finali (MK1; MK2; MK3; MK4; MK5). Il polo produttivo (MAN) può produrre fino a 450k pezzi. I mercati finali richiedono nell'ordine, 90k, 120k, 120k, 70k, 50k pezzi. Per ogni tratta sono noti 1) il costo di trasporto per migliaio di pezzi e 2) il numero massimo di pezzi trasportabili (vedi grafo).



Definire un modello di programmazione lineare intera che minimizzi il costo totale di trasporto, codificarlo in AMPL e determinare una soluzione ottima.

Soluzione (8.5)

2.4 Pianificazione multiperiodo

Difficoltà: ★★★☆☆

Si vuole pianificare la produzione di tre prodotti A_1, A_2, A_3, su un orizzonte temporale di quattro mesi, da Gennaio ad Aprile. Le previsioni di vendita indicano la domanda mensile (in numero di pezzi), che cambia non solo da un prodotto ad un altro, ma anche da un mese all'altro, come riportato nella tabella seguente. Infine, l'ultima riga della tabella riporta i giorni lavorativi utili per ogni mese.

Domanda massima	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile
A_1	5300	1200	7400	5300
A_2	4500	5400	6500	7200
A_3	4400	6700	12500	13200
Giorni lavorativi	23	20	23	22

Ogni prodotto ha un prezzo unitario di vendita ed un costo unitario di produzione (vedi tabella seguente). La capacità produttiva dell'azienda può essere ripartita tra i tre prodotti. Tuttavia la quota di produzione giornaliera di ogni singolo prodotto non può superare il numero di pezzi riportati nell'ultima riga della tabella.

Prodotto	A_1	A_2	A_3
Prezzo di vendita	$124	$109	$115
Costo di produzione	$73.30	$52.90	$65.40
Quota di produzione	500	450	550

All'inizio di ogni mese l'azienda decide se produrre o meno ognuno dei 3 prodotti. Per ogni prodotto, l'attivazione della produzione ha un costo iniziale di setup e comporta la produzione di un numero minimo di pezzi, come riportato in tabella.

Produzione	A1	A2	A3
Costo di attivazione	$150000	$150000	$100000
Lotto minimo	20	20	16

A fine mese, i pezzi prodotti ma non venduti possono essere stoccati in un magazzino. Il costo di stoccaggio unitario mensile è $3.50 per A_1, $4.00 per A_2 e $3.00 per A_3. Per semplicità si assume che tutti i prodotti siano della stessa dimensione e che la capacità totale del magazzino sia limitata a 800 unità.

Definire un modello di PLI che massimizzi il guadagno totale dell'azienda nel periodo, codificarlo con AMPL e determinare una soluzione ottima.

2.5 Un problema di produzione (3)

Difficoltà: ★★☆☆☆

Una azienda produce monitor in tre diversi stabilimenti situati a Ancona, Roma e Milano e per quattro clienti (IBM, HP, Toshiba, Lenovo). Il costo unitario di produzione varia a causa della diversa efficienza produttiva degli stabilimenti. Anche la capacità produttiva varia da stabilimento a stabilimento (vedi tabella seguente).

	Costi di spedizione				Costo produzione	Capacità Produttiva
	IBM	HP	Toshiba	Lenovo		
Ancona	2.5 €	5.0 €	6.4 €	3.5 €	95 €	8600 pz
Roma	3.0 €	2.6 €	1.0 €	1.4 €	102 €	8400 pz
Milano	1.4 €	3.4 €	2.0 €	5.5 €	98 €	9000 pz
domanda	4500 pz	7900 pz	6200 pz	1500 pz		

La domanda di ogni cliente (ultima riga della tabella) può essere soddisfatta da ogni stabilimento ma eventualmente occorre sostenere dei costi di spedizione. Infine, per bilanciare la produzione si richiede

- (caso 1) che l'impianto di Roma produca almeno la metà dei monitor prodotti presso ciascuno degli altri impianti, o alternativamente
- (caso 2) che l'impianto di Roma produca almeno 2/5 dei monitor prodotti congiuntamente presso gli altri impianti

Definire due modelli di programmazione lineare intera che soddisfino la domanda dei clienti al costo minimo nei casi 1 e 2, codificarli in linguaggio AMPL e determinare le soluzioni ottime.

2.6 Un problema di produzione (4)

Difficoltà: ★★★★☆

Un ingegnere gestionale deve pianificare la produzione giornaliera di 2 prodotti A e B. La durata di una giornata lavorativa è di 8 ore (480 minuti) e i tempi per produrre un kg di prodotto sono 3.2 minuti per A e 2 minuti per B.
La produzione *target* dei prodotti è di 100 kg per A e 90 kg per B. La deviazione dalla produzione target ha un costo di rispettivamente 0.50 Euro al kg per il prodotto A e 0.45 Euro al kg per il prodotto B. Definire un modello di PL la cui soluzione individui i livelli di produzione ottimale (cioè quelli con la deviazione minima dalla produzione target).

Soluzione (8.6)

2.7 Un problema di produzione (5)

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Un'azienda di surgelati acquista merluzzo fresco per produrre bastoncini. Il processo produttivo non comporta scarti (il 100% del pesce viene trasformato in prodotto). Il prezzo di acquisto del pesce e la domanda del mercato variano ogni trimestre, secondo la seguente tabella:

	1	2	3	4
Prezzo (€/q)	50	45	60	70
Domanda (q)	100	70	150	200

I bastoncini sono venduti a 250 € al quintale mentre il costo per la trasformazione e il surgelamento è di 25 € al quintale. Il prodotto non venduto alla fine del trimestre viene stoccato nel magazzino surgelatore la cui capacità massima è di 80 quintali. Il costo di stoccaggio è di 6 € al trimestre per quintale. La capacità di trasformazione della fabbrica è di 150 quintali a trimestre.

Analizzando costi e guadagni su base trimestrale, e supponendo che a ogni inizio anno il magazzino debba essere vuoto,

1. si formuli in termini di programmazione lineare intera il problema di pianificare la produzione per il prossimo anno in modo da massimizzare il profitto della azienda.

2. Modificare la formulazione precedente in modo da considerare la deperibilità della merce immagazzinata (la merce non può rimanere in magazzino più di un trimestre).

Soluzione (8.7Esercizio 2.6 (Un problema di produzione (4)))

2.8 Un problema di scommesse

Difficoltà: ★★★★☆

Uno scommettitore dispone di 57.000 € e deve decidere come puntarli sui quattro cavalli *Fulmine*, *Freccia*, *Razzo*, *Ronzino*. I cavalli vengono così quotati dai bookmakers:

Fulmine	2 a 1
Freccia	3 a 1
Razzo	1.5 a 1
Ronzino	4 a 1

Ciò significa che se scommetto per esempio 1 € su Fulmine e Fulmine vince allora guadagno 2 €.
Descrivere un modello di programmazione lineare per determinare la puntata che massimizzi la vincita **nel caso peggiore**, considerando che solo uno dei cavalli vince la gara.

Osservazione: se punto tutto su *Razzo* (il cavallo con probabilità di vincita più alta) la vincita nel caso peggiore è 0 (che si verifica se Razzo perde). Se ripartisco equamente (14.250 € su ogni cavallo) la vincita nel caso peggiore è 21.375 € (che si verifica se Razzo vince).

2.9 Il salvadanaio

Difficoltà: ★★★☆☆

Piero ha rotto il salvadanaio pieno di monete da 5, 10, 20 e 50 centesimi. Piero vuole raggranellare 28 € per comprare un'automobilina e, nel mettere insieme questa cifra, vuole usare tutti i tipi di monete e limitare il più possibile la differenza tra il numero di monete più utilizzate e il numero di monete meno utilizzate.
Quante monete di ciascun tipo deve utilizzare Piero per raggranellare 28 €? Definire un modello di programmazione lineare intera che risolva il quesito, codificarlo con AMPL e determinare una soluzione.

2.10 La fortuna di Saintbull? La pubblicità

Difficoltà: ★★★☆☆

La programmazione di un popolare talk show prevede 5 interruzioni pubblicitarie. Ognuno dei tre sponsor della trasmissione è disposto a spendere una cifra che dipende dall'insieme di interruzioni che gli viene riservato (vedi tabella).

	Sponsor 1			Sponsor 2			Sponsor 3	
offerta	A	B	C	D	E	F	G	H
Interruzione 1	●			●			●	
Interruzione 2	●		●			●	●	
Interruzione 3	●						●	
Interruzione 4		●	●		●	●		●
Interruzione 5		●		●	●			●
cifra	5	4	4	2	2	3	4	3

Ipotizzando che ogni interruzione possa essere venduta al più ad uno sponsor, definire un modello di programmazione lineare intera che assegni slot pubblicitari a sponsor in modo da massimizzare il profitto totale. Codificare il modello con AMPL e determinare una soluzione.

2.11 Project Budgeting

Difficoltà: ★★☆☆☆

Un'azienda può attivare una lista di progetti, ognuno dei quali ha un costo c_i e un guadagno (atteso) g_i (vedi tabella)

Progetto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Costo (M€)	10	6	17	12	31	41	32	25	30	25
Guadagno (M€)	90	120	80	120	90	77	50	58	82	35

L'azienda deve rispettare i seguenti vincoli:

- Il budget a disposizione è di 150 milioni di €;
- I progetti 1 e 2 sono incompatibili;
- Il progetto 4 può essere attivato solo se sono stati attivati i progetti 9 e 10;
- Al più 3 progetti tra i progetti 6, 7, 8, 9, 10 possono essere attivati.

Formulare in termini di programmazione lineare intera il problema di determinare la selezione di progetti che massimizzi il guadagno, codificare con AMPL e determinare una soluzione numerica.

2.12 Il sudoku

Difficoltà: ★★★☆☆

Gioco del sudoku: data una tabella 9×9 e un assegnamento parziale di valori a caselle, completare la tabella in modo tale che ogni riga, colonna e riquadro 3×3 contenga <u>tutti e soli</u> i numeri da 1 a 9.

1. Descrivere un modello di programmazione lineare intera che risolva il sudoku per una qualsiasi tabella data;
2. Codificare il modello con AMPL e determinare la soluzione della tabella seguente:

5				7	4	3		
	9	8						
				5		4		2
	8				3	5		1
				9				
7		1	2				4	
8		3		6				
						8	6	
		6	1	2				5

2.13 Il quadrato magico

Difficoltà: ★★☆☆☆

Un quadrato magico perfetto è una disposizione dei numeri interi compresi tra 1 e n^2 in una matrice quadrata $n \times n$ ($n > 2$) tale che la somma delle entrate in ogni riga, in ogni colonna e in entrambe le diagonali dia sempre lo stesso numero.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

1. Descrivere un modello di programmazione lineare intera in grado di determinare un quadrato magico perfetto di ordine n
2. Codificare il modello con AMPL e risolvere il caso con $n = 10$.

2.14 Il briberonico

Difficoltà: ★★★★☆

Uno scenario politico è formato dai seguenti partiti:

Partito	**Rappresentanti**
Primo Partito	35
Secondo Schieramento	25
Terzo Team	16
Quarto Quartiere	14
Cerchio Cinque	10

Va organizzata una coalizione per far passare una leggina che permetterebbe al gruppo vincente di spartirsi (in parti uguali per ogni votante a favore) cento milioni di euro.
Ma attenzione! E' passata un'altra leggina "ad schieramentum": il *Secondo Schieramento* (il vostro datore di lavoro) può scegliere quale sia la maggioranza richiesta, ossia può chiedere che per far passare la legge possa essere necessaria una maggioranza semplice (50%), una maggioranza a due terzi (67%) o una maggioranza a tre quarti (75%).
Quale maggioranza dovrebbe scegliere il vostro datore di lavoro e quale coalizione dovrebbe promuovere? Utilizzare gli strumenti della programmazione matematica per definire una strategia vincente.

2.15 Fotografie vintage

Difficoltà: ★★★★☆

Un laboratorio fotografico sta studiando i tempi di reazione di un nuovo acido per lo sviluppo di fotografie professionali. Sperimentalmente sono stati calcolati i tempi di sviluppo di una fotografia in base alla quantità di acido impiegato. La Tabella 1 riporta i tempi di sviluppo t in funzione delle quantità q di acido. Sulla base dei dati sperimentali si vuole trovare una legge parabolica (cioè del tipo $t = aq^2 + bq + c$) che approssimi il più possibile l'andamento del tempo di reazione dell'acido.

q (litri)	t (secondi)
0.1	30
0.2	10
0.3	3.5
0.4	2
0.5	1.3

Tabella 1

1. Scrivere un modello di Programmazione Lineare (Intera) che risolva il problema.

2.16 O sta finestra…

Difficoltà: ★★★☆☆

Un'officina che produce infissi in alluminio deve ottenere i profilati descritti in Tabella 1 tagliando barre lunghe 1000 cm.

ordine	*lunghezza*	*num. pezzi*
A	270	47
B	420	21
C	110	23
D	75	42
E	95	19

Tabella 1

La macchina di taglio è in grado di effettuare (per ragioni non molto chiare) solo le configurazioni elencate in Tabella 2 (il numero in colonna *i* e riga *j* indica i pezzi del profilo *j* che si ottengono tagliando una singola barra in accordo allo *schema di taglio* descritto dalla colonna *i*)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	3		1	2			1	3				
B		2	1		2	2			2			
C			1	3		1				9		
D	1	2	1				5				13	
E	1		1		1		3					10

Tabella 2

1. Definire un modello di Programmazione Lineare Intera che determini il minimo numero di barre necessarie per produrre tutti i profilati.
2. Definire un modello di Programmazione Lineare Intera che indichi come ottenere tutti i profilati richiesti producendo il minimo sfrido (lo sfrido è la parte di profilato non utilizzata da uno schema di taglio, per esempio lo sfrido dello schema 4 è 1000 – (2*270 + 3*110) = 130 cm).
3. Codificare i modelli in AMPL e ottenere una soluzione numerica.
4. Dimostrare che in questo caso minimizzare lo sfrido è equivalente a minimizzare il numero di barre utilizzate.
5. Quali schemi occorre introdurre se si vuole esser certi di poter produrre esattamente (cioè senza nessuna eccedenza) i profilati richiesti?

2.17 Le mani in pasta

Difficoltà: ★★★☆☆

Un pastificio produce due diversi formati A e B di tagliatelle, di larghezza rispettivamente pari a 1,2 e 1,5 cm, in tre diverse composizioni: semola (bianca), spinaci (verde) e pomodoro (rosso). I diversi tagli vengono effettuati su una sfoglia larga 6 cm e lunga L, secondo tre diverse modalità:

modalità 1:	A A A A A
modalità 2:	B B B B
modalità 3:	A A B B B

Il pastificio deve soddisfare i seguenti ordini:

Tipo	Numero di confezioni	composizione
A	1000	Bianca
A	800	Rossa
A	700	Verde
B	2000	Bianca
B	1200	Rossa
B	1000	Verde
A	1000	Indifferente
B	2000	Indifferente

Tabella 1

Supponendo che ogni taglio su una sfoglia sia sufficiente a creare una sola confezione (ad esempio, con una sfoglia tagliata in modalità 3 si ottengono 2 confezioni di prodotto A e 3 confezioni di prodotto B) e sapendo che il prezzo della sfoglia rossa e verde è pari a 1,5 volte quello della sfoglia bianca, formulare un modello di Programmazione Lineare Intera che minimizza il costo delle sfoglie necessarie per soddisfare tutti gli ordini.

2.18 Anonima manifattura

Difficoltà: ★★☆☆☆

Un impianto manifatturiero fabbrica due prodotti A e B. La Tabella 1 riporta le previsioni di vendita (espresse in numero di pezzi) per i primi tre mesi dell'anno:

Prodotto	Mese 1	Mese 2	Mese 3
A	45	45	50
B	70	100	70

Tabella 1

La capacità produttiva dell'impianto è di 240 ore di lavoro al mese. La produzione di una unità di A richiede un'ora di lavorazione, mentre per una unità di B è richiesta un'ora e mezza. A fine mese, il magazzino deve avere 25 pezzi di ogni prodotto allo scopo di gestire situazioni impreviste. All'inizio dell'anno il magazzino contiene 85 unità di A e 120 unità di B. I costi mensili di magazzino variano nel tempo e ammontano a 20 euro al pezzo per il primo e secondo mese e 40 euro al pezzo per il terzo mese. L'impresa può produrre i pezzi anche in anticipo, pur di soddisfare le richieste del mercato, ma la capacità del magazzino è di 150 unità di prodotto.
Formulare un modello di Programmazione Lineare Intera che garantisca il soddisfacimento della domanda rispettando tutti i vincoli descritti e minimizzi i costi di magazzino.

2.19 Anonima manifattura (2)

Difficoltà: ★★★☆☆

In un sistema di produzione, n lavori devono essere eseguiti da m macchine in parallelo. Ogni macchina può effettuare un lavoro alla volta e ogni lavoro deve essere eseguito da una sola macchina senza interruzione. L'attivazione di una macchina (necessaria solo se alla macchina viene assegnato almeno un lavoro) ha un costo aggiuntivo di f_i, $i = 1,\ldots,m$. Siano c_{ij} e p_{ij} rispettivamente il costo (in Euro) ed il tempo (in ore) necessari per eseguire il lavoro j sulla macchina i. Sapendo che ogni macchina può operare per non più di C ore, formulare il problema di assegnare i lavori alle macchine, con l'obiettivo di minimizzare i costi totali di produzione.

2.20 Poi dice a che serve la ricerca operativa…

Difficoltà: ★☆☆☆☆

La Facoltà di Scienze Occulte offre, tra gli altri, un corso di laurea in Esoterismo Applicato. La seguente tabella riassume il numero di crediti che si ottengono per ogni insegnamento e il numero di libri da leggere per superare l'esame.

materia	Crediti	Libri da leggere
Scientologia I	7	4
Baccanali I	8	5
Culti Orfici	9	6
Paganesimo Applicato	5	6
Ricerca Operativa	2	3

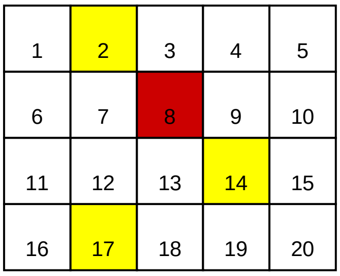
Determinare, tramite un modello di Programmazione Lineare Intera, il numero massimo di crediti che si possono ottenere leggendo al più 14 libri.

Soluzione (8.8)

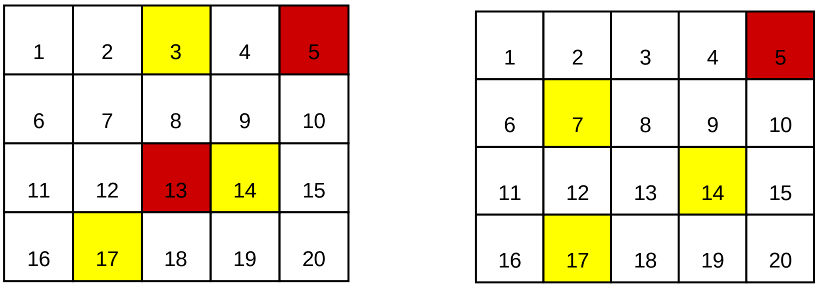
2.21 Avventure di un professore I

Difficoltà: ★★★★★

Il professor Birba, valente matematico e tifoso del Messina, ha deciso di rifare il pavimento della cucina usando piastrelle dei colori sociali della sua squadra del cuore (giallo e rosso). La signora Birba però, giudicando tale accostamento un po' vistoso, gli chiede di intercalare le piastrelle colorate con altre bianche in modo che coppie di piastrelle gialle (rosse) distino almeno 3 piastrelle l'una dall'altra, mentre una piastrella gialla e una rossa distino tra loro almeno 2 piastrelle (definiamo distanza $d(u, v)$ tra due qualsiasi piastrelle u e v del pavimento P come il minimo numero di piastrelle adiacenti in orizzontale o verticale che occorre toccare per passare da u a v, vedi figura). Il professore non ha difficoltà a soddisfare il desiderio di sua moglie, ma cerca di massimizzare il numero di piastrelle colorate formulando un problema di programmazione lineare 0-1. Sapreste dire quale?



Disposizione ammessa dalla signora Birba.



Disposizioni non ammesse dalla signora Birba.

Soluzione (8.9)

2.22 Avventure di un professore II

Difficoltà: ★★★★★

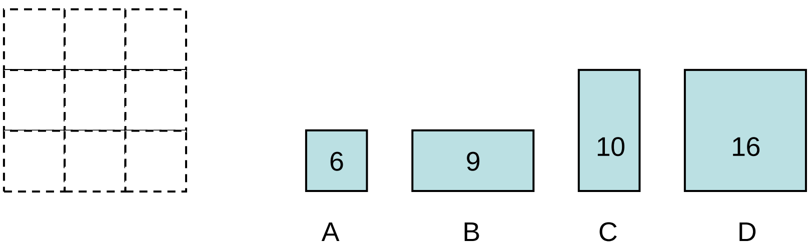
Il professor Birba ama giocare a carte. Essendo un valente matematico quando mischia un mazzo non può fare a meno di pensare che sta operando un assegnamento di carte a posizioni, in cui la carta i-esima del mazzo viene spostata nella posizione j-esima, per $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Può quindi associare a ogni coppia (carta, posizione) una variabile $x_{ij} \in \{0, 1\}$ che viene posta a 1 se e solo se la carta i-esima è riposizionata al posto j. Ricordando che per mischiare le carte uno prima divide il mazzo in due mazzetti N_1 e N_2 ($|N_1| + |N_2| = n$), e che le carte di N_t ($t = 1, 2$) dopo la mischiata conservano nel mazzo l'ordine reciproco che avevano in N_t, a quali vincoli devono essere assoggettate le variabili x_{ij} perché rappresentino un modo corretto di mischiare le carte?

Soluzione (8.10)

2.23 Ancora piastrelle

Difficoltà: ★★★★★

Dobbiamo ricoprire una superficie quadrata 3x3 utilizzando piastrelle del tipo illustrato in figura. Le piastrelle non possono essere ruotate o sovrapposte e la copertura può contenere piastrelle comunque assortite.



Sia P l'insieme delle piastrelle. A ogni piastrella $i \in P$ sono associati una coppia di interi a_i, b_i che rappresentano le sue misure e un costo c_i. Ciascuna piastrella può essere presa un numero di volte a piacere. Usando variabili di decisione binaria x_{ijk} che assumono valore 1 se e solo se una piastrella di tipo i viene posta con l'angolo inferiore sinistro coincidente col punto di coordinate (j, k), formulare in termini di programmazione lineare 0-1 il problema di coprire l'area al costo minimo.

Soluzione (8.11)

2.24 Una cena elegante

Difficoltà: ★★★★★

Re Artù e sua moglie, la regina Ginevra, vogliono inaugurare il nuovo tavolo del salotto offrendo un banchetto ad amici e amiche. Consultatisi con Merlino vengono a sapere che l'etichetta prevede

- un numero di invitati compreso tra quello delle Grazie e quello delle Muse;
- un numero di dame non inferiore al numero dei cavalieri;
- una scelta tale che nessun invitato abbia motivo di inimicizia con nessun altro.

Per ottemperare all'ultimo requisito Merlino, che tutto vede, fornisce ai sovrani un grafo simmetrico nel quale i nodi corrispondono ai potenziali invitati, e gli archi collegano persone tra loro amiche.
Individuare un insieme di variabili di decisione adatte a scegliere e mettere a tavola gli invitati e, tramite queste, fornire un insieme di vincoli che esprimano il rispetto di tutte le condizioni sopra elencate.

Soluzione (8.12)

2.25 Un aiuto per Babbo Natale

Difficoltà: ★★★☆☆

Babbo Natale deve organizzare il suo giro di consegne annuale. Le renne sono stanche, ma bisogna portare regali a un insieme N di bambini partendo dal Polo e tornandoci nel minor tempo possibile. Conoscendo la distanza d_{ij} che separa il bambino i dal bambino j (i, $j \in N$), aiutate il povero vecchietto a fare prima possibile formulando per lui un problema di ottimizzazione combinatoria, specificando l'insieme universo, la famiglia dei sottoinsiemi ammissibili e la funzione peso. Dite inoltre se per ogni funzione peso è sempre possibile risolvere un problema del genere con l'algoritmo greedy, e in caso contrario trovate un controesempio.

Soluzione (8.13)

2.26 Ottimo Natale

Difficoltà: ★★★★★

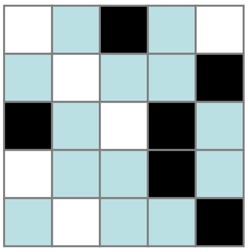
Per far fronte all'offensiva pubblicitaria della sua massima concorrente, la Pepsi Co. ha dato mandato ai propri Babbi Natale di concepire un pacchetto globale di regali che tenga conto delle preferenze dei consumatori. A tutti i consumatori di un insieme C viene inviata una medesima lista di doni D, e a ciascuno viene chiesto di restituirla specificando una classifica che rispetti le proprie preferenze: ognuno si vedrà quindi recapitare sotto l'albero il dono che preferisce (uno solo), purché inserito da Babbo Natale nel pacchetto regali globale. Secondo le disposizioni della Pepsi Co. il pacchetto globale deve contenere al massimo d doni; inoltre il costo complessivo dell'*Operazione Natale* – che somma il valore dei doni recapitati e il costo di consegna – deve essere minimizzato. Scriviamo $P(j, k, h)$ se il consumatore j preferisce il dono k al dono h. Siano inoltre c_k il valore del dono $k \in D$, e c_j il costo del recapito di un dono al consumatore $j \in C$. Si formuli il problema come programmazione lineare 0-1.

Soluzione (8.14)

2.27 Domino

Difficoltà: ★★★★☆

Si vogliono disporre tessere del domino sulla scacchiera raffigurata qui sotto. Ogni tessera occupa due celle quadrate della scacchiera, e si guadagnano o perdono punti a seconda del colore delle celle coperte: una cella bianca fa perdere 2 punti, una grigia ne fa guadagnare 1 e una nera 3. Formulare il problema di disporre le tessere senza farle mai sovrapporre e massimizzando il punteggio ottenuto. Risolvere il problema col metodo del simplesso su reti.



Soluzione (8.15)

2.28 Domino 2 (la vendetta)

Difficoltà: ★★★★★

Stavolta parliamo del domino classico: sulla solita scacchiera vogliamo disporre le ben note tessere rettangolari, contrassegnate ai due estremi da numeri compresi tra 1 e 6. Ogni tessera

- occupa una coppia di celle adiacenti della scacchiera
- va posizionata accostando un suo lato a quello di un'altra già posizionata (due tessere possono anche avere i lati lunghi interamente coincidenti)
- può essere accostata a un'altra solo se i numeri corrispondenti a uno degli estremi che si toccano sono uguali

La sola differenza col domino tradizionale è che, siccome i numeri sulle tessere sono quelli arabi, le tessere non possono essere capovolte: ognuna ha cioè ben associato il suo numero di sinistra e il suo numero di destra, ed è quindi identificata da una coppia ordinata (a, b). Indichiamo le celle della scacchiera con dei numeri interi (vedi figura) e supponiamo di voler usare una variabile 0-1 x_{up} per dire che la tessera $u = (a, b)$ è stata posizionata sulla coppia di celle $p = (i, j)$ con il numero di sinistra, a, posto sulla cella i e il numero di destra, b, posto sulla cella j (per convenzione supponiamo sempre $i < j$).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Come si esprime un vincolo che obblighi la variabile associata a $p = (13, 18)$ e $u = (4, 2)$ a rispettare il terzo requisito?

Soluzione (8.16)

2.29 Elezioni regionali

Difficoltà: ★★★★☆

Alle elezioni regionali della Valpadosta sono candidati P. Marrangio e F. Storehacker. L'esito del voto è incerto, anche in dipendenza della decisione della signora A. Sassolini. Se infatti costei decidesse di presentare una lista autonoma, sottrarrebbe voti a Storehacker favorendo Marrangio. Quest'ultimo può condizionare in parte gli eventi, indicando ai propri fedelissimi di dare un voto o alla lista Capricciosa (moderata) o alla lista PdCI, Partito dei Consumisti Italiani (più estremista). Il dr. L. Mannharen stima come segue il risultato finale per Marrangio in base ai possibili scenari:

- la lista Sassolini (a) si presenta alle elezioni oppure (b) non si presenta;
- i voti di sezione per Marrangio (c) vanno tutti alla lista Capricciosa (d) vanno tutti alla lista PdCI

	c	d
a	46	53
b	51	44

Incaricato da Marrangio, il dr. Mannharen ha studiato la distribuzione ottimale dei voti di sezione formulando un problema di programmazione lineare in cui x_c e x_d rappresentano le percentuali di tali voti dirette alla lista Capricciosa e alla lista

PdCI. L'obiettivo consiste nel calcolare x_c e x_d in modo da massimizzare il peggior risultato atteso per Marrangio, indipendentemente dalle scelte della Sassolini. Indicate qual è il programma lineare formulato.

Soluzione(8.17)

3. Programmazione Lineare e algoritmo del simplesso

La soluzione degli esercizi proposti in questa sezione richiede la conoscenza delle diverse versioni dell'algoritmo del simplesso (simplesso geometrico, primale, duale, revisionato), dei concetti di geometria poliedrale e dei teoremi della programmazione lineare. Alcuni esercizi prevedono una prima parte di modellazione.

3.1 L'erba del vicino (soluzione numerica)

Difficoltà: ★★☆☆☆

Risolvere numericamente (utilizzando l'algoritmo del simplesso) il modello del punto 2. del problema 1.6.

- Qual è il *collo di bottiglia* del sistema?
- Qual è la soluzione ottima se la quantità massima di concime (di entrambi i tipi) non può superare 800 Kg?
- Qual è la soluzione ottima se la gestione del magazzino impone il totale utilizzo del potassio?
- Il modello è ancora valido se i concimi possono essere prodotti solo in lotti di produzione di un determinato peso? Giustificare la risposta.

3.2 poliedri e vertici

Difficoltà: ★★☆☆☆

Si consideri il poliedro definito dal seguente sistema di (dis)equazioni lineari:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 - 1/2x_3 + x_4 &= 4 \\
2x_1 + 4/3x_2 + 2/3x_3 + 5x_4 &= 8/3 \\
x_i \geq 0 \qquad & i = 1,\ldots,4
\end{aligned}
$$

e si considerino i punti (0, 1, 2, 0), (4/3, 0, 0, 0), (1, 1/4, 1/2, 0).

1. Indicare quali dei precedenti punti sono vertici del poliedro (motivare la risposta).
2. Si consideri la funzione obiettivo min z = $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$. Stabilire, se ciascun vertice individuato nel punto 1. è una soluzione ottima o meno.

3.3 Fase I

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Al termine della fase I del metodo del simplesso, il tableau del problema artificiale si presenta così (le ultime due colonne si riferiscono alle variabili artificiali):

2	**0**	**1**	**1**	**2**	**0**	**0**
4	1	2	1	1	0	**3**
3	0	2	-1	2	1	**0**

Come ottenere una base ammissibile e la corrispondente soluzione di base per il problema originario?

3.4 Basi ammissibili e ottime

Difficoltà: ★★☆☆☆

Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{aligned}
\min z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 & \\
x_1 + 2x_2 + 5x_4 &= 7 \\
x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 4 \\
x_i \geq 0 \qquad & i = 1,\ldots,5
\end{aligned}
$$

1. Indicare se le matrici formate dalle colonne ($\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$), ($\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$) e ($\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_5$) sono basi ammissibili e ottime.
2. Calcolare la soluzione ottima del problema duale.

3.5 Esecuzione del simplesso

Difficoltà: ★☆☆☆☆

Si risolva il seguente problema di programmazione lineare mediante il metodo del simplesso.

$$\begin{aligned}
\max z = 12x_1 + 20x_2 & \\
2x_1 + x_2 &\le 100 \\
-3x_1 + 5x_2 &\le 240 \\
x_1 &\le 40 \\
x_i &\ge 0 \qquad i = 1,2
\end{aligned}$$

3.6 Mangia sano e vivi meglio

Difficoltà: ★★☆☆☆

Nella dieta ideale, un robot deve assumere quotidianamente alimenti in modo da garantirsi almeno 60 grammi di titanio e 108 di uranio impoverito. La seguente tabella riporta il contenuto di 4 marche di olio minerale in termini dei due principi citati e il costo per Kg:

Olio	SINT 3000	GlobalPina	Scell	Mobbing
Titanio	5	0	4	2
Uranio impoverito	0	9	3	6
costo	2	5	6	8

Si vuole risolvere il problema di fornire al robot tuttofare il necessario alimento senza spendere più del dovuto.

1. Formulare il problema in termini di programmazione lineare.
2. Scrivere il duale del problema formulato.
3. Risolvere il duale con il metodo del simplesso.

Soluzione(8.18)

3.7 Un pieno di energia

Difficoltà: ★★★☆☆

Dicono che col simplesso si riescono a risolvere problemi pratici. Bene, a me lo zabaione piace piuttosto alcolico, ma è sempre meglio non eccedere: non più di un bicchierino di marsala ogni otto cucchiai di zucchero. Inoltre nella giornata non dovrei prendere più di tre tazzine di zabaione, per il colesterolo.
Per il resto, la ricetta prevede almeno due uova per bicchierino di marsala. E almeno quattro cucchiai di zucchero per ogni uovo.
Visto che un uovo sta in una tazzina e una tazzina contiene quattro cucchiai oppure due bicchierini, quanto marsala potrò assumere al massimo ogni giorno?

Soluzione(8.19)

3.8 Simplesso sul problema delle elezioni regionali

Difficoltà: ★★☆☆☆

Risolvere con l'algoritmo del simplesso il problema 2.29 (Elezioni regionali)

Soluzione(8.20)

3.9 Un problema di produzione (2)

Difficoltà: ★★☆☆☆

Un'azienda fabbrica tre prodotti (A, B e C) che richiedono come materia prima una certa quantità di acciaio. Per ogni prodotto, la Tabella 1 riporta i requisiti di acciaio (kg per 1 kg di prodotto), i costi di produzione al netto delle materie prime (in Euro per kg di prodotto), e i profitti di vendita (in Euro per kg di prodotto). Un kg di acciaio costa 5 Euro e la quantità massima disponibile dal fornitore è di 4000 kg.

Prodotto	q.ta di acciaio	costo	profitto
A	-	12	25
B	1	6	30
C	2	4	30

Tabella 1

Considerando che (*i*) la quantità di A prodotta deve essere almeno il doppio della quantità di B e che (*ii*) la quantità di A prodotta non può eccedere la quantità di C,

1. formulare un modello di Programmazione Lineare che determini il ricavo massimo;
2. determinare una soluzione numerica del modello del punto 1 con l'algoritmo del simplesso;
3. codificare il modello del punto 1 in AMPL e determinare una soluzione numerica.

3.10 Simplesso (1)

Difficoltà: ★★★☆☆

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \max z = 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 & \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 90 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 90 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 90 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Inoltre, determinare i costi ridotti, i valori delle variabili di slack e i prezzi ombra all'ottimo. Indicare infine le massime variazioni marginali per termini noti e coefficienti della funzione obiettivo.

3.11 Basi ottime

Difficoltà: ★★★☆☆

Mostrare che la base {1,2,4} è ottima per il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 - x_2 + x_3 & \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Inoltre, determinare i costi ridotti, i valori delle variabili di slack e i prezzi ombra all'ottimo. Indicare infine le massime variazioni marginali per termini noti e coefficienti della funzione obiettivo.

3.12 Basi ottime (2)

Difficoltà: ★★★☆☆

Mostrare che la base {1,3,5} è ottima per il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Inoltre, determinare i costi ridotti, i valori delle variabili di slack e i prezzi ombra all'ottimo. Indicare infine le massime variazioni marginali per termini noti e coefficienti della funzione obiettivo.

3.13 Un problema parametrico

Difficoltà: ★★★★☆

Sia dato il seguente problema di PL

$$
\begin{aligned}
\max z(\mathbf{x}) = \; & 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 500 \\
& 3x_1 + 4x_3 \le 460 \\
& x_1 + 4x_2 \le b \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

ove b può assumere solo valori ≥ 0.

1. *Supponendo* di ignorare completamente ogni algoritmo per la risoluzione della programmazione lineare e indicando con $z(\mathbf{x}^*)$ la soluzione ottima del problema, determinare due valori z_{min} e z_{max} tali che $z_{min} \leq z(\mathbf{x}^*) \leq z_{max}$, *giustificando le vostre affermazioni*.
2. Determinare con un algoritmo per la Programmazione Lineare di vostra scelta la soluzione ottima nel caso di b = 400.
3. Sia $z(\mathbf{x}^*)$ la soluzione determinata al punto 2. Determinare l'intervallo in cui b può variare lasciando invariata la base ottima.

4. Dualità

La soluzione degli esercizi proposti in questa sezione richiede la conoscenza dei risultati della teoria della dualità e la loro applicazione all'analisi di post-ottimalità nell'ambito della Programmazione Lineare.

4.1 Scarti complementari

Difficoltà: ★★☆☆☆

Si consideri il problema di Programmazione Lineare

$$
\begin{aligned}
(P)\ \max\ & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 14 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 10 \\
& x_1 - x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. scrivere il problema duale;
2. verificare che $\mathbf{x} = (20/3, 11/3)$ è una soluzione ammissibile di (P);
3. applicando le condizioni di ortogonalità, dimostrare che $\mathbf{x}$ è anche ottima per (P);
4. applicando le condizioni di ortogonalità, determinare la soluzione ottima del duale.

Soluzione(8.21)

4.2 Scarti complementari (2)

Difficoltà: ★★★☆☆

Si consideri il problema di Programmazione Lineare

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 \\
\text{c1:}\ & x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 \geq 8 \\
\text{c2:}\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\
\text{c3:}\ & x_1 + 5x_2 + x_3 + 8x_4 - s_1 = 3 \\
& \mathbf{x}, s_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Sapendo che la soluzione ottima ha $x_1^* = x_2^* = 0$ e $s_1^* > 0$ determinare la soluzione ottima **senza utilizzare il metodo del simplesso**.

Soluzione(8.218.22)

4.3 Ottimo senza simplesso

Difficoltà: ★★☆☆☆

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{aligned}
\min z = & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 11 \\
& x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7
\end{aligned}
$$

Dimostrare (senza risolvere il problema con il simplesso) che una soluzione ottima è (4, 1.5, 0).

4.4 Ottimo senza simplesso (2)

Difficoltà: ★★☆☆☆

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare con variabili $x_j \geq 0$ tutte non negative:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
& 2x_1 + x_3 + x_4 \geq 11 \\
& 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 5 \\
& x_2 - x_3 = 20
\end{aligned}
$$

Determinare la soluzione ottima del problema duale sapendo che una soluzione ottima del problema primale ha le componenti $x_2 = 20$ e $x_4 = 11$.

4.5 Ottimo senza simplesso (3)

Difficoltà: ★★☆☆☆

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{llll} \min & 5x_1 + 3x_2 + x_3 & & \\ & x_1 + 3x_2 & \geq 10 & \\ & x_2 + x_3 & \geq 7 & \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, \dots, 3 \end{array}$$

Determinare la soluzione ottima (senza risolvere il problema con il simplesso) sapendo che una soluzione ottima del problema duale ha la componente $u_2 = 1$.

4.6 Duale e ottimo

Difficoltà: ★★☆☆☆

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{llll} \min & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 & & \\ & x_1 + 2x_2 & \geq 1 & \\ & x_2 + 2x_3 & \geq 1 & \\ & x_3 + 2x_4 & \geq 1 & \\ & x_4 + 2x_5 & \geq 1 & \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, \dots, 5 \end{array}$$

Scrivere il problema duale e determinarne la soluzione ottima (senza risolverlo con il simplesso), sapendo che la soluzione ottima del problema primale è (0, 1/2, 1/4, 1, 0).

4.7 Ortogonalità e sensitività

Difficoltà: ★★★☆☆

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{llll} \min & z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 & & \\ & 3x_1 + x_2 & \geq 2 & \\ & x_2 + 2x_3 & = 4 & \\ & x_3 + x_4 & \leq 5 & \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Determinare la soluzione ottima del problema duale sapendo che la soluzione ottima del primale è (2/3, 0, 2, 3). Dire inoltre di quanto può variare il termine noto del terzo vincolo del problema primale affinché la base associata alla soluzione ottima rimanga la stessa.

4.8 Ortogonalità e sensitività (2)

Difficoltà: ★★★☆☆

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{llll} \min & z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \geq 1 & \\ & 2x_2 + x_3 & \geq 1 & \\ & 2x_3 + x_4 & \geq 1 & \\ & 2x_4 + x_5 & \geq 1 & \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, \dots, 5 \end{array}$$

Determinare la soluzione ottima del problema sapendo che la soluzione del problema duale è (1, 0, 1/2, 1/4). Dire inoltre di quanto può variare il termine noto del terzo vincolo del problema primale affinché la base associata alla soluzione ottima rimanga la stessa.

5. Grafi e ottimizzazione combinatoria

Gli esercizi proposti in questa sezione possono essere risolti in generale utilizzando i risultati della teoria dei grafi e i problemi classici di ottimizzazione combinatoria. Se non diversamente specificato, è richiesta la definizione di un modello parametrico in termini di variabili decisionali intere e/o binarie, vincoli lineari e funzione obiettivo, ed eventualmente la sua codifica in un linguaggio di modellazione algebrica (per esempio AMPL).

5.1 Un problema di *outsourcing*

Difficoltà: ★★☆☆☆

Ogni giorno la società *Manufacturing Ltd.* deve trasportare del materiale dal proprio impianto di produzione a un deposito. Un consulente ha suggerito alla direzione di ricorrere all'*outsourcing*: affidare cioè il trasporto a una delle 6 società *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* che già coprono la tratta per altri clienti e che, nei giorni indicati con una X, dispongono sui propri mezzi di spazio sufficiente. Considerando che ogni società ha un determinato costo mensile di outsourcing (ultima riga della tabella),

	A	B	C	D	E	F
Lu	×	×				
Ma			×	×	×	
Me	×					
Gi			×			
Ve				×		×
Sa		×			×	×
Canone (€)	200	250	225	230	245	255

1. descrivere un modello di programmazione lineare intera che determini la soluzione di costo minimo, codificarlo con AMPL e determinare la soluzione ottima nel caso descritto dalla tabella precedente.
2. Formulare in termini di ottimizzazione combinatoria su un grafo opportuno il problema di individuare una soluzione di costo minimo per l'impresa (disegnare il grafo, descrivere il significato di nodi e archi e indicare le strutture che rappresentano soluzioni del problema).

5.2 Un'asta combinatoria

Difficoltà: ★★☆☆☆

Una galleria d'arte mette all'asta 6 quadri di valore. All'asta partecipano 6 collezionisti A, B, C, D, E e F, ognuno disposto ad acquistare in blocco un dato lotto di quadri per una certa cifra (vedi tabella).

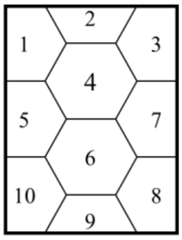
	A	B	C	D	E	F
1	×	×			×	
2			×	×		×
3	×		×			
4					×	
5			×	×		×
6		×		×		
Offerte (€)	1000	800	760	810	410	560

1. Descrivere un modello di programmazione lineare intera che stabilisca come aggiudicare i lotti ai partecipanti al fine di massimizzare l'introito, codificarlo in AMPL e determinare la soluzione numerica del caso riportato in tabella.
2. Formulare in termini di ottimizzazione combinatoria su un grafo opportuno il problema di aggiudicare l'asta massimizzando l'introito (disegnare il grafo, descrivere il significato di nodi e archi e indicare le strutture che rappresentano soluzioni del problema).

5.3 Assegnamento di frequenze

Difficoltà: ★★★☆☆

In un sistema di telefonia cellulare, per evitare interferenze le celle adiacenti devono operare a frequenze diverse. La banda concessa alla società che gestisce il sistema contiene le 4 frequenze distinte *a*, *b*, *c*, *d*.
Si vuole sapere se sia possibile assegnare una frequenza a ciascuna delle celle di figura in modo che frequenze interferenti non siano assegnate a celle adiacenti.



1. Scrivere un modello di programmazione lineare intera che risolva il quesito, codificarlo con AMPL e determinare una soluzione numerica.
2. Formulare in termini di ottimizzazione combinatoria su un grafo opportuno il problema di determinare tale assegnamento (disegnare il grafo, descrivere il significato di nodi e archi e indicare le strutture che rappresentano soluzioni del problema).

5.4 Turni di guardia

Difficoltà: ★★★☆☆

Antonio, Bruno e Carmelo sono tre soldati addetti a un servizio da ricoprire 24 ore su 24. Il sergente ha dato loro facoltà di organizzare liberamente i turni di servizio, con la sola condizione della <u>presenza di un militare in ogni ora del giorno</u>.
I tre si accordano nel suddividere la giornata in 6 turni di 4 ore l'uno, dopodiché ciascuno esprime le proprie preferenze (denominate A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3) associando a ciascuna di esse un peso (a peso maggiore corrisponde maggiore preferenza).

Antonio			Bruno			Carmelo		
A1 = 3	A2 = 2	A3 = 1	B1 = 1	B2 = 3	B3 = 2	C1 = 2	C2 = 1	C3 = 3
×	×						×	
		×	×	×	×	×		
×							×	
		×			×	×		
			×					×
	×			×				×

Siccome però <u>non è consentita la contemporanea presenza in servizio di due o più militari</u>, ci si chiede se una soluzione che massimizzi il peso complessivo delle preferenze dei tre militari sia o meno applicabile.
1. Formulare il problema in termini di Programmazione Lineare Intera.
2. Formulare in termini di ottimizzazione combinatoria su un grafo opportuno il problema di determinare tale soluzione (disegnare il grafo, descrivere il significato di nodi e archi e indicare le strutture che rappresentano soluzioni del problema).

5.5 Il tuttofare

Difficoltà: ★★★★☆

Si deve eseguire un insieme di n lavori della durata di p ore ciascuno. Il lavoro i richiede la presenza di un addetto per un certo numero di ore $q_i < p$ e in momenti ben determinati: ad esempio, il lavoro 1 richiede l'addetto nella prima, nella terza e nella quarta ora di esecuzione. Vi è tuttavia un solo addetto disponibile, e siccome i lavori devono iniziare tutti insieme può darsi che alcuni di essi richiedano contemporaneamente la sua presenza.
1. Formulare in termini di Programmazione Lineare Intera il problema di massimizzare il numero dei lavori eseguibili in p ore.

2. Formulare il problema in termini di ottimizzazione combinatoria su un grafo opportuno (disegnare il grafo, descrivere il significato di nodi e archi e indicare le strutture che rappresentano soluzioni del problema).
3. Indicare inoltre l'insieme universale U, la regione ammissibile $\Im$ e la funzione peso c.

5.6 Google maps

Difficoltà: ★★★★☆

In un database geografico vengono memorizzati i dati relativi ad aree rettangolari di diverse dimensioni. Per evitare duplicazioni di informazione si cerca di individuare aree che abbiano parti in comune, e a questo scopo si vuole preventivamente capire quale sia l'insieme di rettangoli che copre la più grande superficie senza condividere alcuna parte.
1. Formulare il problema in termini di Programmazione Lineare Intera.
2. Formulare il problema in termini di ottimizzazione combinatoria su un grafo opportuno (disegnare il grafo, descrivere il significato di nodi e archi e indicare le strutture che rappresentano soluzioni del problema).
3. Si indichi l'insieme universale U, la famiglia $\Im$ delle soluzioni ammissibili e la funzione peso c.
4. Si costruisca inoltre un esempio in corrispondenza al quale l'algoritmo greedy fallisce.

5.7 Tutto all'asta

Difficoltà: ★★★☆☆

Per aggiudicare un'importante gara d'appalto, un ente decide di raccogliere le offerte da parte dei contendenti. Ciascuna offerta i copre in generale un sottoinsieme P_i delle prestazioni richieste e comporta un certo prezzo c_i. Si desidera individuare un insieme di offerte che copra esattamente le prestazioni richieste e costi all'ente il meno possibile.
Formulare il problema in termini di ottimizzazione combinatoria specificando l'insieme universo U, la famiglia $\Im$ delle soluzioni ammissibili e la funzione peso c.

6. Ottimizzazione su reti

I problemi proposti in questa sezione possono essere formulati e risolti prendendo spunto dai modelli classici di ottimizzazione su reti e relativi algoritmi.

6.1 Trasfusioni di sangue

Difficoltà: ★★★☆☆

In un ospedale arrivano 169 persone, ognuna delle quali necessita di una trasfusione di una unità di sangue. L'ospedale ha una scorta di 170 unità totali di sangue. Il numero di unità di sangue a disposizione per ogni gruppo sanguigno e la distribuzione dei pazienti tra i vari gruppi sanguigni è la seguente:

gruppo sanguigno	A	B	0	AB
Scorta	46	34	45	45
domanda	39	38	42	50

In base alle note compatibilità tra gruppi sappiamo che:

- i pazienti del gruppo A possono ricevere sangue di tipo A o 0,
- quelli di gruppo B possono ricevere sangue di tipo B o 0,
- quelli di gruppo AB possono ricevere sangue di qualunque tipo e
- infine i pazienti di gruppo 0 possono ricevere solo sangue di tipo 0.

1. Formulare come massimo flusso il problema di determinare il piano di trasfusione che soddisfa il maggior numero di domande. Descrivere le scelte fatte, in particolare il significato dei nodi, degli archi e delle capacità della rete.
2. Determinare una soluzione ottima utilizzando l'algoritmo di Ford-Fulkerson e illustrando i dettagli dei singoli passaggi (Suggerimento: partire da un flusso non nullo calcolato in modo euristico).
3. Determinare e illustrare sul grafo un taglio di capacità minima.

6.2 Partitella a calcetto

Difficoltà: ★★★☆☆

Otto amici si ritrovano per una partitella a calcetto e devono comporre le squadre. Nella scelta dei compagni ognuno esprime delle preferenze (con un valore da 1 a 10) come riportato nella tabella.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
A		3		5	5			7
B			8					6
C				7				
D		9				8		
E				3			2	10
F								
G				5		5		
H			10					

1. Definire una opportuna funzione obiettivo che "misuri" la soddisfazione complessiva degli amici relativamente alla composizione delle 2 squadre.
2. Utilizzando la funzione obiettivo definita nel punto precedente, formulare in termini di Programmazione Lineare Intera il problema di determinare le due squadre "ottime".
3. Dare un'interpretazione del problema su un grafo opportunamente definito.

6.3 Arrotondamento consistente

Difficoltà: ★★★★★

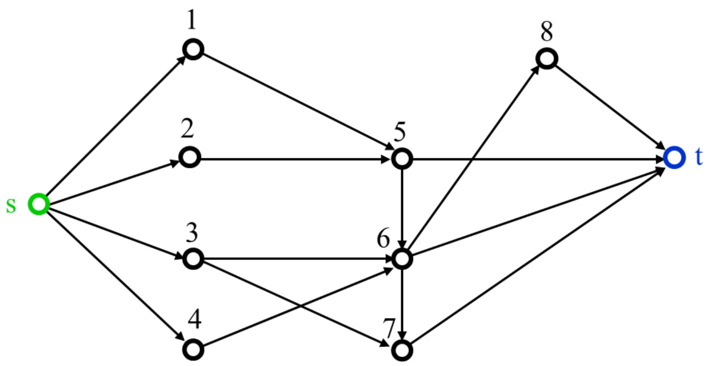
L'arrotondamento dei dati di una tabella si dice consistente se per ogni riga e colonna la somma degli elementi arrotondati è uguale all'arrotondamento della somma (l'arrotondamento dell'elemento a è l'intero $\lceil a \rceil$ oppure l'intero $\lfloor a \rfloor$).
Definire un modello di programmazione matematica che effettui l'arrotondamento consistente di una tabella data (suggerimento: il problema può essere ricondotto a un massimo flusso su grafo opportuno). Codificare il modello in AMPL e determinare l'arrotondamento consistente della seguente tabella:

3.1	6.8	7.3	17.2
9.6	2.4	0.7	12.7
3.6	1.2	6.5	11.3
16.3	10.4	14.5	

6.4 Cammini disgiunti

Difficoltà: ★★★★☆

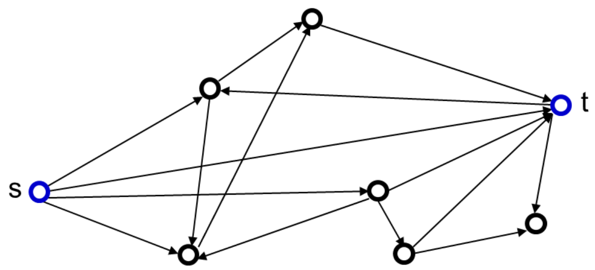
Data la seguente rete, calcolare il massimo numero di (s, t)-cammini *node-disjoint* e *arc-disjoint*.



6.5 Sabotaggio

Difficoltà: ★★★★★

Qual è il minimo numero di archi la cui rimozione sconnette s da t ?



7. Programmazione Intera

In questa sezione vengono proposti problemi che richiedono l'applicazione di algoritmi esatti e euristici per la programmazione intera (branch-and-bound, piani di taglio, programmazione dinamica, algoritmo greedy).

7.1 Piani di taglio di Gomory

Difficoltà: ★★★☆☆

Risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare Intera con l'algoritmo dei piani di Gomory:

$$\begin{aligned} \max z = 40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4 \\ 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 22 \\ x_i \geq 0, \text{ intero} \end{aligned}$$

Soluzione(8.218.23)

Soluzioni

8. Soluzioni

8.1 Esercizio 1.13 (Miscelazione di benzine)

Variabili di decisione: siano y_A e y_B le quantità di benzina rispettivamente di tipo A e B prodotte; sia inoltre x_{ij} la quantità di prodotto i (per $i \in \{1,2,3\}$) nella benzina j (per $j \in \{A,B\}$). Il modello è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5.5\, y_A + 4.5\, y_B - 3(x_{1A} + x_{1B}) - 6(x_{2A} + x_{2B}) - 4(x_{3A} + x_{3B}) \\
& x_{1A} + x_{1B} \le 3000 \\
& x_{2A} + x_{2B} \le 2000 \\
& x_{3A} + x_{3B} \le 4000 \\
& y_A = x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \\
& y_B = x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \\
& x_{1A} \le 0.3\, y_A \\
& x_{1B} \le 0.5\, y_B \\
& x_{2A} \ge 0.4\, y_A \\
& x_{2B} \ge 0.1\, y_B \\
& y_A, y_B, x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B}, x_{3A}, x_{3B} \ge 0
\end{aligned}
$$

La funzione obiettivo massimizza la differenza tra i ricavi ($5.5\, y_A + 4.5\, y_B$) e i costi ($3(x_{1A} + x_{1B}) + 6(x_{2A} + x_{2B}) + 4(x_{3A} + x_{3B})$). I primi tre vincoli limitano le quantità utilizzate dei prodotti 1, 2 e 3 alle rispettive disponibilità in magazzino. Il quarto e quinto vincolo determinano le quantità di benzine A e B prodotte. Gli altri vincoli impongono il rispetto delle quantità minime e massime di prodotto 1 e 2 nelle benzine e la non negatività delle quantità in gioco.

Si osservi che le variabili y_A e y_B sono di comodo perché vengono utilizzate solo in vincoli di uguaglianza e quindi possono essere sostituite nel resto del modello con le loro espressioni. Si ottiene il seguente modello equivalente (cioè con la stessa soluzione ottima) ma diverso nella struttura (due vincoli e due variabili in meno e una matrice dei coefficienti con più valori non nulli).

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5.5\,(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 4.5\,(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) - 3(x_{1A} + x_{1B}) - 6(x_{2A} + x_{2B}) - 4(x_{3A} + x_{3B}) \\
& x_{1A} + x_{1B} \le 3000 \\
& x_{2A} + x_{2B} \le 2000 \\
& x_{3A} + x_{3B} \le 4000 \\
& x_{1A} \le 0.3\,(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\
& x_{1B} \le 0.5\,(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
& x_{2A} \ge 0.4\,(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\
& x_{2B} \ge 0.1\,(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
& x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B}, x_{3A}, x_{3B} \ge 0
\end{aligned}
$$

In generale, i vincoli di uguaglianza possono sempre essere rimossi sostituendo una variabile con la sua espressione.

8.2 Esercizio 1.14 (Il cocktail ideale)

Definiamo le seguenti variabili di decisione:
x_1 = numero di dosi utilizzate di Dry Gin
x_2 = numero di dosi utilizzate di Negroni
x_3 = numero di dosi utilizzate di Martini Dry Rosso
x_4 = numero di bottigliette dell’altro liquore.

Il cocktail richiede 12 dosi di bitter. Il bitter è presente nel Negroni (1/3 di dose ogni dose di Negroni) e nell’altro liquore (1,5 dosi per ogni bottiglietta), quindi dovrà essere:

$$1/3\, x_2 + 1{,}5\, x_4 = 12$$

Con un ragionamento del tutto analogo si possono scrivere i vincoli sul numero di dosi di Martini Rosso e Dry Gin:

$$1/3\, x_2 + 1/3\, x_3 + 2\, x_4 = 35$$
$$x_1 + 1/3\, x_2 + 2/3\, x_3 + x_4 = 45$$

Le dosi utilizzate sono evidentemente quantità non negative e dai dati del problema si ricavano immediatamente le disponibilità

$$\begin{array}{ll} x_1 \geq 0 & x_1 \leq 25 \\ x_2 \geq 0 & x_2 \leq 30 \\ x_3 \geq 0 & x_3 \leq 32 \\ x_4 \geq 0 & x_4 \leq 6 \end{array}$$

Dato che non è detto che le quantità a disposizione corrispondano esattamente a un certo numero di dosi di cocktail, dobbiamo prevedere uno scostamento dalla ricetta ideale. Lo facciamo introducendo una variabile non vincolata in segno (che misura l'errore commesso) per ogni vincolo dettato dalla ricetta:

$$1/3\ x_2 + 1{,}5\ x_4 + x_5 = 12$$
$$1/3\ x_2 + 1/3\ x_3 + 2\ x_4 + x_6 = 35$$
$$x_1 + 1/3\ x_2 + 2/3\ x_3 + x_4 + x_7 = 45$$

La migliore approssimazione del cocktail ideale è quella ottenuta minimizzando la somma dei valori assoluti delle variabili x_5, x_6 e x_7.

8.3 Esercizio 1.20 (Mi fonde il cervello)

Definiamo le seguenti variabili di decisione:
x_i = percentuale di materiale *i* utilizzato in un Kg di lega

Siccome le variabili indicano delle percentuali, si dovrà avere

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Minimizzare i costi di produzione della lega significa minimizzare il costo unitario (per kg), ossia la funzione

$$680\ x_1 + 750\ x_2 + 450\ x_3 + 870\ x_4$$

I vincoli percentuali della composizione si esprimono nel modo seguente:

$$\begin{array}{llll} 3 \leq & 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 & \leq 8 & \text{Alluminio} \\ 4 \leq & 4x_1 + 4x_2 + 2.5x_3 + 5x_4 & \leq 5 & \text{Silicio} \\ & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 & \leq 5 & \text{Carbonio} \end{array}$$

8.4 Esercizio 1.24 (Puliamo il mondo)

Il fabbisogno di energia dell'impianto (40 MW per 12 ore = 480 MWh) si esprime come segue:

$$e + 2{,}4p + 1{,}6c = 480$$

Poiché p e c sono parte del materiale in uscita dall'impianto, e poiché a fronte di 600 tonnellate di RSU l'impianto produce $0{,}30 \cdot 600 = 180$ tonnellate di plastica e $0{,}50 \cdot 600 = 300$ tonnellate di altro combustibile, dovrà aversi

$$p \leq 180 \qquad c \leq 300$$

oltre a, ovviamente, $e, p, c \geq 0$.
D'altra parte, il costo complessivo in euro dell'energia acquistata, detratti i ricavi dovuti alla vendita di plastica e altro combustibile, è pari a:

$$f(e, p, c) = 210e - 240(180 - p) - 170(300 - c) = 210e + 240p + 170c - 94200$$

Il problema da risolvere è allora

$$\begin{array}{lrl} \min & 210e + 240p + 170c & \\ & 10e + 24p + 16c & = 4800 \\ & p & \leq 180 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
c &\leq 300 \\
e, p, c &\geq 0
\end{aligned}
$$

Questo problema si risolve facilmente senza l'ausilio del metodo del simplesso (perché è in definitiva un problema di zaino): basta infatti ordinare le variabili per rapporto costo/resa non crescente, e assegnar loro nell'ordine valori > 0, fino a saturazione dell'eventuale limitazione superiore. Nel nostro caso i rapporti costo/resa di e, p, c valgono rispettivamente 210/10 = 21, 240/24 = 10, 170/16 = 10,625. Perciò in assenza di limitazioni superiori alle tre variabili la soluzione ottima consisterebbe nell'assegnare valore 4800/24 = 200 alla variabile p e 0 alle altre due. Tuttavia tale valore non è compatibile con il vincolo $p \leq 180$, pertanto si sceglierà $p^* = 180$ e si cercherà di soddisfare il vincolo di eguaglianza ponendo $c^* = (4800 - 24 \cdot 180)/16 = 30$. Avendosi $c^* \leq 300$, si può porre $e^* = 0$ ottenendo una soluzione ammissibile di valore (ottimo) $f(e^*, p^*, c^*) = 43200 + 5100 - 94200 = -45900$.

8.5 Esercizio 2.3 (Un problema di logistica)

Modello AMPL

```
# --------------- PARAMETRI ----------------------
#citta', ovvero nodi del grafo
set CITTA;

#collegamenti tra le citta'
set LINKS within (CITTA cross CITTA);

#produzione effettuata nella citta'
param prod {CITTA} >= 0;

#pezzi richiesti dalla citta'
param dom {CITTA} >= 0;

check: sum {i in CITTA} prod[i] = sum {i in CITTA} dom[i];

#costo di trasporto/1000 pezzi
param costo {LINKS} >= 0;

#massimo numero di pezzi trasportabile
param capacita {LINKS} >=0;

# --------------- VARIABILI ----------------------
#prod. trasportato
var trasp {(i,j) in LINKS} >=0, <= capacita[i,j];

# --------------- FUNZIONE OBIETTIVO ----------------------
minimize CostoTotale: sum {(i,j) in LINKS} costo[i,j] * trasp[i,j];


# --------------- VINCOLI ----------------------
subject to Bilanciamento{k in CITTA}:
prod[k] + sum {(i,k) in LINKS} trasp[i,k] = dom[k] + sum {(k,j) in LINKS} trasp[k,j]
```

Dati dell'istanza

```
set CITTA := MAN WH1 WH2 MK1 MK2 MK3 MK4 MK5;

param prod default 0 := MAN 450;

param dom default 0 := MK1 90, MK2 120, MK3 120, MK4 70, MK5 50;

param: LINKS:     costo      capacita :=
        MAN WH1      2.5           250
        MAN WH2      3.5           250
        WH1 MK1      1.7           100
        WH1 MK2      0.7           100
        WH1 MK3      1.3           100
        WH2 MK2      1.3           100
        WH2 MK3      0.8           100
        WH2 MK4      0.2           100
        WH2 MK5      2.1           100;
```

8.6 Esercizio 2.6 (Un problema di produzione (4))

Variabili di decisione:

x_i = deviazione (in kg) dalla produzione target del prodotto i

Siccome la deviazione può essere in eccesso o in difetto il costo complessivo dipende dal valore assoluti delle variabili x_1 e x_2. Il modello di programmazione matematica è il seguente:

$$\begin{aligned} \min z &= 0.5\,|x_1| + 0.45\,|x_2| \\ 3.2\,(100 + x_1) &+ 2\,(90 + x_2) \le 480 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

A causa delle presenza dei valori assoluti nella funzione obiettivo, il modello matematico non è lineare. Effettuiamo la seguente trasformazione: sostituiamo x_i con la differenza di due variabili non negative:

$$x_i = x^+{}_i - x^-{}_i$$

In questo modo il valore assoluto $|x_i|$ può essere espresso come $x^+{}_i + x^-{}_i$ e il modello diventa:

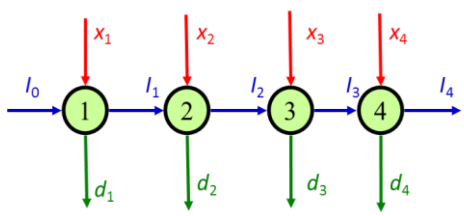
$$\begin{aligned} \min z &= 0.5\,(x^+{}_1 + x^-{}_1) + 0.45\,(x^+{}_2 + x^-{}_2) \\ 3.2\,(100 + x^+{}_1 - x^-{}_1) &+ 2\,(90 + x^+{}_2 - x^-{}_2) \le 480 \\ x^+{}_1, x^-{}_1, x^+{}_2, x^-{}_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

8.7 Esercizio 2.7 (Un problema di produzione (5))

Il problema è riconducibile a un lot-sizing capacitato. Definiamo le seguenti variabili di decisione:

- x_i = quantità (in kg) di merluzzo acquistato all'inizio del trimestre i
- I_i = quantità (in kg) di bastoncini in magazzino alla fine del trimestre i

Se tutto il pesce acquistato viene trasformato in bastoncini (assenza di magazzini per le materie prime), il flusso del prodotto finito può essere rappresentato dal seguente grafo in cui ogni nodo rappresenta un trimestre:



Considerando che il guadagno totale è una costante (dipende dalla domanda totale che a sua volta è una costante), la massimizzazione del profitto coincide con la minimizzazione della spesa. La funzione obiettivo quindi sarà:

$(250 - 25)(100 + 70 + 150 + 200) - \min 50x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 70x_4 + 6(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$

I vincoli devono esprimere la conservazione del flusso temporale del prodotto finito e devono tener conto delle capacità produttive e di immagazzinamento dell'impianto.

1. Vincoli di conservazione del flusso:

$$I_0 + x_1 = 100 + I_1$$
$$I_1 + x_2 = 70 + I_2$$
$$I_2 + x_3 = 150 + I_3$$
$$I_3 + x_4 = 200 + I_4$$

   Inoltre, siccome ogni inizio anno il magazzino deve essere vuoto, poniamo $I_0 = I_4 = 0$.

2. Siccome il magazzino è adibito allo stoccaggio del prodotto finito, tutto il merluzzo acquistato in un trimestre deve essere trasformato nello stesso trimestre. Quindi, considerando le capacità produttive dell'impianto si ha:

$$0 \leq x_i \leq 150 \qquad i = 1,\ldots,4$$

   D'altra parte il magazzino ha una capacità limitata, quindi

$$0 \leq I_i \leq 80 \qquad i = 1,\ldots,4$$

Punto 2)

Supponendo (ragionevolmente) che la politica di vendita sia quella di smistare prima i bastoncini più vecchi e siccome i bastoncini non possono restare in magazzino per più di un trimestre, la disponibilità di magazzino di un trimestre deve essere tutta assorbita dalla domanda del trimestre successivo, quindi:

$$I_0 \leq 100$$
$$I_1 \leq 70$$
$$I_2 \leq 150$$
$$I_3 \leq 200$$

Si osservi che, data la capacità limitata del magazzino del caso specifico in questione, solo il vincolo $I_1 \leq 70$ non è ridondante.

8.8 Esercizio 2.20 (Poi dice a che serve la ricerca operativa…)

Il problema si formula nel modo seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 2x_5 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 14 \\ & 0 \leq x_1, \ldots, x_5 \leq 1, \text{ interi} \end{array}$$

I rapporti crediti/libri sono i seguenti:

materia	Crediti/Libri
Scientologia I	1.75
Baccanali I	1.60
Culti Orfici	1.50
Paganesimo Applicato	0.83
Ricerca Operativa	0.67

L'algoritmo Greedy che tiene conto dei rapporti sopra calcolati fornisce la soluzione ammissibile (1, 1, 0, 0, 1) di valore Il rilassamento lineare del problema ammette la soluzione ottima (1, 1, 5/6, 0, 0) di valore 22.5. Quest'ultimo può essere assunto come limitazione superiore iniziale. Applicando quindi uno schema di branch-and-bound a partire da tali valori si ricava che la soluzione ottima $\mathbf{x}^* = (0, 1, 1, 0, 1)$ di valore 19.

8.9 Esercizio 2.21 (Avventure di un professore I)

Variabili di decisione

$x_u = 1$ se la piastrella u è gialla, $x_u = 0$ altrimenti ($u \in P$)

$y_u = 1$ se la piastrella u è rossa, $y_u = 0$ altrimenti ($u \in P$)

Vincoli

$x_u + y_u \leq 1$,	$u \in P$	(una piastrella non ha più di un colore)
$x_u + y_v \leq 1$,	$d(u, v) < 2$	(piastrelle distanti meno di due non possono essere entrambe colorate)
$x_u + x_v \leq 1$,	$d(u, v) < 3$	
$y_u + y_v \leq 1$,	$d(u, v) < 3$	(piastrelle distanti meno di tre non possono avere medesimo colore)
$x_u, y_u \in \{0, 1\}$		

Obiettivo

$\max \sum_{u \in P}(x_u + y_u)$ (numero di piastrelle colorate)

8.10 Esercizio 2.22 (Avventure di un professore II)

Vincoli

$\sum_{i=1,\dots,n} x_{ij} = 1$	$j = 1, \dots, n$	ogni posizione deve essere occupata da una carta
$x_{ij} + x_{hk} \leq 1$	$i, h \in N_1, i < h, j > k$	
$x_{ij} + x_{hk} \leq 1$	$i, h \in N_2, i < h, j > k$	nel mazzo mischiato le carte di N_t devono mantenere lo stesso ordine che avevano in N_t, (t = 1,2)

8.11 Esercizio 2.23 (Ancora piastrelle)

Sono necessari due vincoli, uno che garantisca la non-sovrapposizione delle piastrelle, e un altro che garantisca la copertura completa dell'area del rettangolo. Il primo si può esprimere in questo modo:

$x_{ijk} + x_{pqr} \leq 1$ per ogni $i, p \in P$, e per ogni coppia di punti (i, j), (q, r)

Infatti, se la piastrella di tipo i è posizionata nel punto (j, k), allora nessuna piastrella p potrà essere posizionata nei punti (q, r) per $q = j, \dots, j + a_i - 1$, $r = k, \dots, k + b_i - 1$

Riguardo al secondo vincolo, osserviamo che ogni punto (q, r) è potenzialmente coperto da un certo insieme di piastrelle poste in un certo insieme di punti, cioè da un certo insieme di terne (i, j, k): ad esempio, il punto (1, 1) è coperto dalle terne $(i, 0, 0)$, $(i, 0, 1)$, $(i, 1, 0)$, $(i, 1, 1)$ per i = A, B, C, D. Sia $T(j, k)$ l'insieme delle terne che coprono il punto (j, k). Allora:

$\sum_{t \in T(j,k)} x_t = 1$ per ogni punto (j, k)

8.12 Esercizio 2.24 (Una cena elegante)

Sia $G = (V, E)$ il grafo che esprime l'amicizia tra i potenziali invitati. Per ogni $u \in V$, sia x_u una variabile di decisione 0-1 tale che $x_u = 1$ se e solo se la persona u viene invitata al banchetto. Siccome questo grafo contiene anche i nodi a e g corrispondenti ad Artù e Ginevra, si avrà senz'altro $x_a = x_g = 1$.

La prima condizione comporta un vincolo sul numero complessivo di persone da invitare

$3 \leq \sum_{u \in V - \{a, g\}} x_u \leq 9$ cioè $3 + 2 \leq \sum_{u \in V} x_u \leq 9 + 2$

Sia $V = D \cup C$, dove D è l'insieme delle dame e C quello dei cavalieri. La seconda condizione impone

$$\sum_{u \in C} x_u \leq \sum_{u \in D} x_u$$

Infine, se due persone risultano non amiche, una delle due non dev'essere invitata:

$$x_u + x_v \leq 1 \qquad \forall uv \notin E$$

8.13 Esercizio 2.25 (Un aiuto per Babbo Natale)

Babbo Natale forse non lo sa, ma deve risolvere un problema di *commesso viaggiatore*. Questo problema ha come insieme universo $U = N \times N$ la famiglia di tutte le possibili coppie di bambini.

Una soluzione ammissibile consiste in un insieme di coppie che formano un *circuito hamiltoniano* sul grafo completo $G = (N, U)$, perciò:

$$\Im = \{X \subseteq U: X \text{ circuito hamiltoniano di } G\}$$

Il costo di una soluzione corrisponde alla somma delle distanze associate alle coppie che la formano: $c(X) = \sum_{ij \in X} d_{ij}$

L'algoritmo greedy purtroppo non può esserci utile: applicato al caso in esame fornirebbe infatti un albero ricoprente (e non un circuito hamiltoniano) di peso minimo.

8.14 Esercizio 2.26 (Ottimo Natale)

Variabili di decisione:

$x_k \in \{0, 1\} = 1$ se e solo se il dono k è inserito nel pacchetto globale.

$x_{jk} \in \{0, 1\} = 1$ se e solo se il consumatore j ottiene il dono k.

Vincoli:

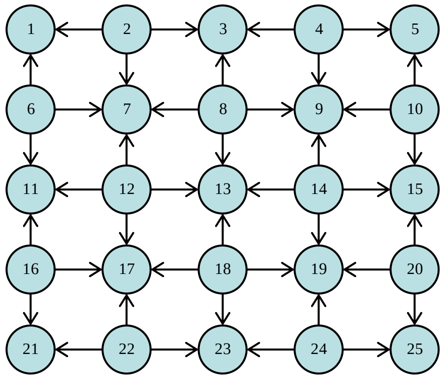
$\sum_{k \in D} x_k \leq d$		non più di d doni
$x_{jk} \leq x_k$	$\forall\, j \in C, k \in D$	il consumatore j può ottenere il dono k solo se k è inserito nel pacchetto globale
$\sum_{h:P(j,\,h,\,k)} x_{jh} \leq 1 - x_k$	$\forall\, j \in C, k \in D$	Se il dono k è inserito nel pacchetto globale, il consumatore j non vorrà nessun dono h che ritiene peggiore di k Infatti se $x_k = 1$ allora $x_{jh} = 0$ per ogni dono h che j ritiene peggiore di k.
$\sum_{k \in D} x_{jk} = 1$	$\forall\, j \in C$	Naturalmente i consumatori che sottoscrivono il Natale Pepsi avranno un dono ciascuno

Funzione obiettivo:

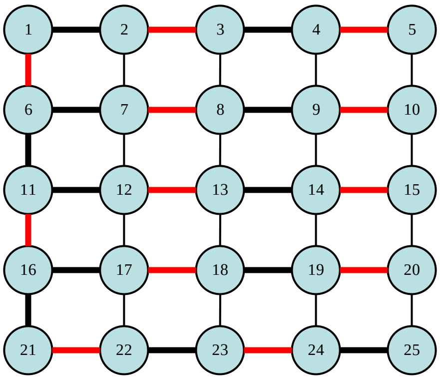
$\min \sum_{k \in D} x_k + \sum_{k \in D} \sum_{j \in C} x_{jk}$	la Pepsi Co. vuole minimizzare il costo complessivamente sostenuto per l'iniziativa

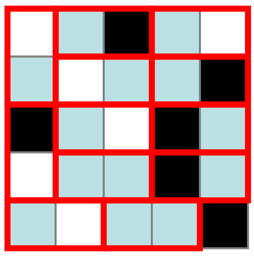
8.15 Esercizio 2.27 (Domino)

Basta associare alla scacchiera un grafo G con i nodi $\{1, 2, \ldots, 25\}$ corrispondenti alle celle della scacchiera. Ogni arco corrisponde a una coppia di celle adiacenti ed ha come peso la somma dei relativi punteggi. Ad esempio, associando numeri crescenti alle celle da sinistra verso destra e dall'alto in basso, l'arco 12 pesa $3 + 1 = 4$, l'arco 67 pesa $1 - 2 = -1$ e così via. Si noti che il grafo è bipartito, dal momento che è privo di cicli dispari: l'insieme dei nodi pari e quello dei nodi dispari sono evidentemente stabili.

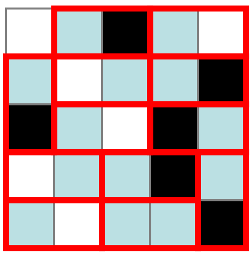


Il problema è un matching di peso massimo, che si riformula come flusso a costo minimo aggiungendo un nodo sorgente *s* e un nodo pozzo *p*, gli archi *sj* (*j* pari) e *jt* (*j* dispari) con capacità unitaria, e un arco di ritorno *ts* con capacità illimitata (questa costruzione è necessaria in quanto il grafo non ammette un matching perfetto). L'orientamento degli altri archi sarà dai nodi pari ai nodi dispari (vedi figura). Il costo degli archi che coinvolgono *s* o *t* è pari a 0, quello degli altri archi pari alla somma dei punteggi degli estremi cambiata di segno, e il problema consiste nel calcolare una circolazione di costo minimo. Siccome la matrice dei vincoli del problema è totalmente unimodulare ogni soluzione di base risulterà intera e, dal momento che gli archi aggiunti hanno capacità unitaria, avrà valori 0-1: come è facile verificare, il sottovettore corrispondente agli archi della griglia è caratteristico di un matching di *G*. Una base corrisponde a un qualunque insieme di archi che forma un albero ricoprente *G*. Ad esempio si può scegliere come base iniziale l'insieme B_0 corrispondente agli archi a tratto grosso nella figura seguente (a sinistra). Una soluzione ammissibile di base si ha ponendo $x_{16} = x_{11,16} = x_{23} = x_{45} = \ldots = x_{21,22} = x_{23,24} = 1$ (archi colorati, variabili non fissate agli estremi) e $x_{12} = x_{34} = x_{6,11} = x_{16,21} = \ldots = x_{22,23} = x_{24,25} = 0$ (archi neri, variabili fissate all'estremo inferiore). La disposizione delle tessere associata a questo matching, di peso 16, è visibile nella figura a destra.





Un'operazione di pivot comporta l'introduzione di un arco entrante in base, con conseguente formazione di un ciclo da eliminare selezionando un opportuno arco uscente. L'arco entrante va scelto in base ai costi ridotti: ad esempio risulta favorevole inserire l'arco (20, 25). Il ciclo introdotto è formato da quest'arco e da (16, 17), (18, 17), (18, 19) ,(20, 19, (16, 21), (22, 21), (22, 23), (24, 23), (24, 25). L'operazione conduce alla nuova soluzione indicata nella figura successiva, di peso 21, che tuttavia non risulta ancora ottima (può ad es. essere migliorata ponendo a 0 la variabile x_{45}).



8.16 Esercizio 2.28 (Domino 2 (la vendetta))

Indichiamo con $Q(j)$ l'insieme delle coppie di celle adiacenti $q = (w, z)$ con z adiacente a j, $z \neq i$, $w < z$.

	7	8	9	
	12	13	14	
	17	18	19	
	22	23	24	

Ad esempio, con riferimento alla figura e alla coppia p = (13, 18) si ha $Q(18)$ = {(12, 17), (22, 23), (14, 19)}

Analogamente indichiamo con $R(j)$ l'insieme delle celle $r = (w, z)$ con w adiacente a j, $w \neq i$, $w < z$. Sempre con riferimento alla figura si ha quindi $R(18)$ = {(17, 22), (23, 24), (19, 24)}.
Siano poi $S(k)$ e $T(k)$ gli insiemi delle tessere della forma $s = (y, b)$ e $t = (b, y)$, rispettivamente, con y qualsiasi. Nel nostro caso, $b = 2$, si ha

$S(2)$ = {(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (6, 2)}
$T(2)$ = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)}.

Definiamo in modo analogo $Q(i)$, $R(i)$, $S(a)$ e $T(a)$ relativamente all'adiacenza alla cella i e a tessere della forma $s = (y, a)$ e $t = (a, y)$. Nel nostro esempio si ha quindi

$Q(13)$ = {(7, 12), (9, 14), (7, 8)}
$R(13)$ = {(8, 9), (12, 17), (14, 19)}

$S(4)$ = {(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)}
$T(4)$ = {(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)}

Il vincolo deve costringere x_{up} a valere 0 se non vi è alcuna tessera s o t in posizione q o r opportuna:

$$x_{up} \leq \sum_{\substack{q \in Q(j) \\ s \in S(b)}} x_{qs} + \sum_{\substack{r \in R(j) \\ t \in T(b)}} x_{rt} + \sum_{\substack{q \in Q(j) \\ s \in S(a)}} x_{qs} + \sum_{\substack{r \in R(i) \\ t \in T(a)}} x_{rt}$$

8.17 Esercizio 2.29 (Elezioni regionali)

Variabili decisionali:
r = peggior risultato atteso per Marrangio
x_c = percentuali di voti di sezione dirette alla lista Capricciosa
x_d = percentuali di voti di sezione dirette alla lista PdCI

Vincoli:

$x_c + x_d = 1$	le variabili x_c e x_d sono percentuali, o equivalentemente frazioni di unità
$x_c, x_d \geq 0$	
$r \leq 46x_c + 53x_d$	nello scenario (a), cioè se la lista Sassolini si presenta alle elezioni, i voti di sezione per Marrangio non possono essere superiori a una qualunque combinazione degli scenari (c) e (d)
$r \leq 51x_c + 44x_d$	considerazione analoga nel caso si verificasse lo scenario (b)

Funzione obiettivo:

max r	miglior risultato (nel caso peggiore)

8.18 Esercizio 3.6 (Mangia sano e vivi meglio)

Il problema è quello della dieta ideale, e quindi il modello di Programmazione Lineare (che non necessita di ulteriori commenti) è il seguente:

$$\begin{array}{lrrrrl}
\min & 2x_A + & 5x_B + & 6x_C + & 8x_D & \\
& 5x_A & + & 4x_C + & 2x_D \geq & 60 \\
& & 9x_B + & 3x_C + & 6x_D \geq & 108
\end{array}$$

$x_A, x_B, x_C, x_D \geq \quad 0$

Applicando le note regole di trasformazione, si ottiene il seguente problema duale:

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 60y_1 + 108y_2 & & \\
 & 5y_1 & \leq & 2 \\
 & 9y_2 & \leq & 5 \\
 & 4y_1 + 3y_2 & \leq & 6 \\
 & 2y_1 + 6y_2 & \leq & 8 \\
 & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Il problema è messo in forma standard aggiungendo variabili slack. Siccome i termini noti sono tutti non negativi, le variabili slack formano una prima base ammissibile (colonne in grigio). Di seguito, la scelta del pivot è evidenziata in rosso:

60	108	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	2
0	**9**	0	1	0	0	5
4	3	0	0	1	0	6
2	6	0	0	0	1	8

Seconda base

60	0	0	–12	0	0	–60
5	0	1	0	0	0	2
0	1	0	1/9	0	0	5/9
4	0	0	–1/3	1	0	13/3
2	0	0	–2/3	0	1	14/3

Terza e ultima base

0	0	–12	–12	0	0	–84
1	0	1/5	0	0	0	2/5
0	1	0	1/9	0	0	5/9
0	0	–4/5	–1/3	1	0	41/15
0	0	–2/5	–2/3	0	1	58/15

La soluzione ottima e $y_1 = 2/5$, $y_2 = 5/9$

Il valore della soluzione ottima del duale (e quindi del problema originale) è 84€.

8.19 Esercizio 3.7 (Un pieno di energia)

Variabili decisionali:

x_1 = numero di uova ingerite nell’arco della giornata
x_2 = cucchiai di zucchero ingeriti nell’arco della giornata
x_3 = bicchierini di marsala ingeriti nell’arco della giornata

non più di un bicchierino di marsala ogni otto cucchiai di zucchero.
Non più di tre tazzine di zabaione.

Visto che un uovo sta in una tazzina e una tazzina contiene quattro cucchiai oppure due bicchierini, quanto marsala potrò assumere al massimo ogni giorno?

Vincoli:

$x_1 \geq 2x_3$	almeno due uova per bicchierino di marsala
$x_2 \geq 4x_1$	almeno quattro cucchiai di zucchero per ogni uovo
$x_3 \leq 8x_2$	non più di un bicchierino di marsala ogni otto cucchiai di zucchero
$x_1 + 0.25\, x_2 + 0.50\, x_3 \leq 3$	non più di tre tazzine di zabaione (ogni uovo occupa una tazzina, ogni

cucchiaio di zucchero ne occupa un quarto e ogni bicchierino di marsala ne occupa mezza)

funzione obiettivo:

max x_3

Aggiunte le variabili di slack w_1, … w_4 il problema risulta direttamente in forma canonica (la base è indicata dalle colonne in grigio e l'elemento di pivot dal colore rosso):

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
0	0	1	0	0	0	0	0
–1		**2**	1				0
4	–1			1			0
	–8	1			1		0
4	1	2				1	12

La soluzione iniziale, degenere, è $x_1 = x_2 = x_3 = w_1 = w_2 = w_3 = 0$, $w_4 = 12$ e ha valore 0. Si può tentare di migliorarla eseguendo un'operazione di pivot in corrispondenza della colonna 3 e, ad esempio, della riga 1:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
1/2	0	0	– 1/2	0	0	0	0
– 1/2		1	1/2				0
4	–1			1			0
1/2	–8		– 1/2		1		0
5	1		–1			1	12

Il tentativo successivo va fatto con un pivot in colonna 1 e riga 2, o in colonna 1 e riga 3; scegliendo la prima soluzione si ha:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
0	1/8	0	– 1/2	– 1/8	0	0	0
	– 1/8	1	1/2	1/8			0
1	– 1/4			1/4			0
	– 63/8		– 1/2	– 1/8	1		0
	9/4		–1	– 5/4		1	12

Il nuovo elemento di pivot si trova ora in colonna 2 e riga 4:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
0	0	0	– 4/9	– 1/18	0	– 1/18	– 2/3
		1	4/9	1/18		1/18	2/3
1			– 1/9	1/9		1/9	4/3
			–4	– 9/2	1	7/2	42
	1		– 4/9	– 5/9		4/9	16/3

La riga dei costi ridotti indica che la soluzione trovata, x_1 =4/3, x_2 =16/3, x_3 =2/3, è ottima. Essa corrisponde a due terzi di bicchierino di marsala al giorno: ragionevole, no?

8.20 Esercizio 3.8 (Simplesso sul problema delle elezioni regionali)

Il modello di Programmazione Lineare del problema delle elezioni regionali è:

$$\max\ r$$
$$r \leq 46x_c + 53x_d$$
$$r \leq 51x_c + 44x_d$$
$$x_c + x_d = 1$$
$$x_c, x_d \geq 0$$

ovvero

$$
\begin{array}{rl}
\max & r \\
& r - 46x_c - 53x_d \le 0 \\
& r - 51x_c - 44x_d \le 0 \\
& x_c + x_d = 1 \\
& x_c, x_d, r \ge 0
\end{array}
$$

Poiché il problema non è in forma standard aggiungiamo due variabili di slack non negative w_1, w_2:

$$
\begin{array}{rl}
\max & r \\
& r - 46x_c - 53x_d + w_1 = 0 \\
& r - 51x_c - 44x_d + w_2 = 0 \\
& x_c + x_d = 1 \\
& x_c, x_d, r, w_1, w_2 \ge 0
\end{array}
$$

Otteniamo la seguente tabella, che non risulta essere in forma canonica:

r	x_c	x_d	w_1	w_2	
1	0	0	0	0	0
1	– 46	– 53	1		0
1	– 51	– 44		1	0
	1	1			1

Per renderla canonica risolviamo il problema ausiliario (in cui è sufficiente introdurre una sola variabile artificiale w_0 dato che w_1 e w_2 sono già variabili di slack)

$$
\begin{array}{rl}
\min & w_0 \\
& r - 46x_c - 53x_d + w_1 = 0 \\
& r - 51x_c - 44x_d + w_2 = 0 \\
& x_c + x_d + w_0 = 1 \\
& x_c, x_d, r, w_0, w_1, w_2 \ge 0
\end{array}
$$

la cui tabella (non ancora in forma canonica) è:

r	x_c	x_d	w_0	w_1	w_2	
0	0	0	1	0	0	0
1	– 46	– 53		1		0
1	– 51	– 44			1	0
	1	1	1			1

La tabella può essere resa in forma canonica sottraendo la terza riga dalla riga dei costi ridotti. La base è costituita dalle colonne in grigio. Come colonne di pivot si possono scegliere la seconda e la terza. In ogni caso, l'unica riga di pivot che può essere scelta è la terza. L'elemento di pivot è evidenziato in rosso.

r	x_c	x_d	w_0	w_1	w_2	
0	–1	–1	0	0	0	–1
1	– 46	– 53		1		0
1	– 51	– 44			1	0
	1	1	1			1

Scegliendo l'elemento di pivot in posizione (3, 2) si ha la tabella ottima (di valore ottimo 0)

r	x_c	x_d	w_0	w_1	w_2	
0	0	0	1	0	0	0
1		–7	46	1		46
1		7	51		1	51
	1	1	1			1

dove la variabile x_c è entrata in base con valore 1 al posto della variabile w_0. Quindi la soluzione corrente ($x_c = 1$, $x_d = 0$) individua una base per il problema di partenza. Ripristiniamo la tabella originale rimuovendo la variabile w_0 e reintroducendo la variabile r in funzione obiettivo. La nuova tabella è già in forma canonica:

r	x_c	x_d	w_1	w_2	
1	0	0	0	0	0
1		–7	1		46
1		7		1	51
	1	1			1

Il problema è di massimo, e vi è un unico costo ridotto positivo, corrispondente alla variabile r. L'elemento di pivot si trova in posizione (1, 1). Eseguendo l'operazione si ottiene

r	x_c	x_d	w_1	w_2	
0	0	7	–1	0	–46
1		–7	1		46
		14	–1	1	5
	1	1			1

La soluzione corrente non è ancora ottima perché c'è un costo ridotto positivo nella colonna corrispondente alla variabile x_d. L'elemento di pivot si trova in posizione (3, 2). Eseguendo si ha la tabella ottima

r	x_c	x_d	w_1	w_2	
0	0	0	–13/14	–1/14	–48.5
1			1		53
		1	–1/14	1/14	5/14
	1		1/14	–1/14	9/14

corrispondente alla soluzione $x_c = 9/14$, $x_d = 5/14$.

8.21 Esercizio 4.1 (Scarti complementari)

Il duale del problema dato è:

$$\begin{aligned}
\text{(D) } \min\ & 14y_1 + 10\, y_2 + 3y_3 \\
& y_1 \ + 2y_2 \ + y_3 \geq 2 \\
& 2y_1 \ - y_2 \ - y_3 \geq 1 \\
& y_1, y_2\, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Il teorema delle condizioni di ortogonalità afferma che se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ è ammissibile per il primale e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ è ammissibile per il duale, ed inoltre entrambe soddisfano

$$\begin{aligned}
y_i\,(\mathbf{a}_i\mathbf{x} - b_i) &= 0 \qquad \forall i \\
(c_j - \mathbf{y}A_j)\, x_j &= 0 \qquad \forall j
\end{aligned}$$

allora $\mathbf{x}$ è l'ottimo del primale e $\mathbf{y}$ del duale.
$\mathbf{x} = (20/3, 11/3)$ soddisfa tutti i vincoli di (P), quindi è una soluzione primale ammissibile. Scriviamo le equazioni degli scarti complementari:

$$\begin{aligned}
y_1\,(x_1 + 2x_2 - 14) &= 0 \\
y_2\,(2x_1 - x_2 - 10) &= 0 \\
y_3\,(x_1 - x_2 - 3) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1\,(y_1 + 2\,y_2 + y_3 - 2) &= 0 \\
x_2\,(2\,y_1 - y_2 - y_3 - 1) &= 0
\end{aligned}$$

sostituiamo $\mathbf{x}$ = (20/3, 11/3) nelle equazioni:

$$y_1\,(0) = 0$$
$$y_2\,(-\,1/3) = 0$$
$$y_3\,(0) = 0$$

$$20/3\,(y_1 + 2\,y_2 + y_3 - 2) = 0$$
$$11/3\,(2\,y_1 - y_2 - y_3 - 1) = 0$$

Dato che $\mathbf{x}$ **non** soddisfa all'uguaglianza il secondo vincolo di (P), dovrà essere $y_2 = 0$. Inoltre, dato che $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, possiamo ridurre il sistema a:

$$y_1 + 2\,y_2 + y_3 - 2 = 0$$
$$2\,y_1 - y_2 - y_3 - 1 = 0$$
$$y_2 = 0$$

e ricavare la soluzione $\mathbf{y}$ = (1, 0, 1), che si verifica facilmente essere duale ammissibile in quanto soddisfa tutti i vincoli di (D).
Poiché $\mathbf{x}$ è una soluzione primale ammissibile, $\mathbf{y}$ è duale ammissibile e la coppia di soluzioni primale/duale ($\mathbf{x}$; $\mathbf{y}$) soddisfa le condizioni di ortogonalità, ne consegue che $\mathbf{x}$ è la soluzione ottima del problema primale, mentre $\mathbf{y}$ è la soluzione ottima del problema duale.
Si può inoltre verificare che le due soluzioni hanno lo stesso valore di funzione obiettivo, ovvero che vale $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{b}$.

8.22 Esercizio 4.2 (Scarti complementari (2))

la variabile s_1 è una variabile di surplus che può essere eliminata modificando il vincolo c3:

$$\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 \\
& x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 \geq 8 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\
& x_1 + 5x_2 + x_3 + 8\,x_4 \geq 3 \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}$$

Il problema duale quindi risulta essere il seguente:

$$\begin{aligned}
\max\ & 8y_1 + 6y_2 + 3y_3 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \\
& 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \leq 5 \\
& 7y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 6 \\
& y_1 + 5y_2 + 8y_3 \leq 1 \\
& y_1, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Le condizioni di complementarità per la coppia primale-duale sono:

$$\begin{cases}
x_1\,(3 - (y_1 + 2y_2 + y_3)) = 0 \\
x_2(5 - (2y_1 + 3y_2 + 5y_3)) = 0 \\
x_3(6 - (7y_1 + 4y_2 + y_3)) = 0 \\
x_4(1 - (y_1 + 5y_2 + 8y_3)) = 0 \\
\\
y_1(x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 - 8) = 0 \\
y_2(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6) = 0 \\
y_3(x_1 + 5x_2 + x_3 + 8x_4^* - 3) = 0
\end{cases}$$

Sappiamo che all'ottimo si ha $x_1^* = x_2^* = 0$ e $s_1^* > 0$.
Se $s_1^* > 0$ allora $x_1^* + 5x_2^* + x_3^* + 8\,x_4^* > 3$ quindi deve essere $y_3^* = 0$.
Il sistema quindi può essere riscritto come:

$$x_3(6 - (7y_1 + 4y_2)) = 0$$
$$x_4(1 - (y_1 + 5y_2)) = 0$$

$$y_1(7x_3 + x_4 - 8) = 0$$
$$y_2(4x_3 + 5x_4 - 6) = 0$$

Supponiamo ora che all'ottimo x_3^* e x_4^* siano strettamente positive. In questo caso, dalle condizioni di ortogonalità, si ha che

$$7y_1^* + 4y_2^* = 6$$
$$y_1^* + 5y_2^* = 1$$

La soluzione del sistema è $y^* = (26/31,\ 1/31)$ e il vettore $y^* = (26/31,\ 1/31,\ 0)$ è una soluzione duale ammissibile. In corrispondenza a questa soluzione duale si ha:

$$7\,x_3^* + x_4^* = 8$$
$$4\,x_3^* + 5\,x_4^* = 6$$

La cui soluzione è (34/31, 10/31), in accordo all'ipotesi $x_3^* > 0$ e $x_4^* > 0$.
La soluzione $x^* = (0,\ 0,\ 34/31,\ 10/31)$ è primale ammissibile, e siccome (x^*, y^*) soddisfano le condizioni di complementarità, (x^*, y^*) è una coppia di soluzioni primale-duale ottime.

8.23 Esercizio 7.1 (Piani di taglio di Gomory)

Si tratta di un problema di knapsack intero, che potrebbe dunque anche risolversi ad esempio con la programmazione dinamica, o con un branch and bound specializzato. Tuttavia utilizziamo i piani di Gomory.
Poniamo il problema in forma canonica introducendo una variabile *s* di slack:

x_1	x_2	x_3	x_4	s	
– 40	– 24	– 15	– 8	0	0
8	6	5	4	1	22

Effettuiamo un'operazione di pivot sulla prima colonna, da cui il tableau ottimo

x_1	x_2	x_3	x_4	s	
0	6	10	12	5	110
1	3/4	5/8	1/2	1/8	22/8

La soluzione ottima è frazionaria. La componente frazionaria definisce il taglio di Gomory

$$3/4\,x_2 + 5/8\,x_3 + 1/2\,x_4 + 1/8\,s \geq 3/4$$

che corrisponde al vincolo $\quad – 3/4\,x_2 – 5/8\,x_3 – 1/2\,x_4 – 1/8\,s + w_0 = – 3/4$

Dopo aver aggiunto il vincolo, il tableau non è più in forma canonica per il simplesso primale. Tuttavia, il tableau è in forma canonica per il simplesso duale e l'elemento di pivot risulta essere – 3/4

x_1	x_2	x_3	x_4	s	w_0	
0	6	10	12	5	0	110
1	3/4	5/8	1/2	1/8		22/8
	– 3/4	– 5/8	– 1/2	– 1/8	1	– 3/4

Il nuovo tableau è:

x_1	x_2	x_3	x_4	s	w_0	
0	0	5	8	4	8	104
1					1	2
	1	5/6	2/3	1/6	4/3	1

La soluzione di base corrente (2, 1, 0, 0) è ottima e intera.